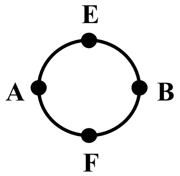
فصل دوم

دایره:

دایره، مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که فاصله آن‌ها از نقطه‌ی ثابتی واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. نقطـه‌ی ثابـت، مرکز دایره و مقدار ثابت، شعاع دایره نامیده می‌شود.دایره به مرکز O و شعاع R را با $C(O,R)$ نشان می‌دهند.

از دو نقطه‌ی متمایز بیشمار دایره می‌گذرد. مکان هندسی مرکز دایره‌ها، عمودمنصف پاره‌خطی است که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند. از سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست یک دایره و فقط یک دایره می‌گذرد که مرکـزش محـل تلاقـی عمودمنصـف دوبـه‌دوی پاره‌خط‌ها می‌باشد.

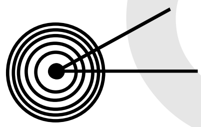
کمان:



دو نقطه‌ی A و B را بر روی دایره در نظر بگیرید. این دو نقطه محیط دایره را به دو قسمت کوچـک و بزرگ تقسیم می‌کنند که هر کدام از آن‌ها را یک کمان می‌نامند. (در حالتی کـه دو نقطـه دو سـر دو قطـر باشند، دو قسمت برابرند.)

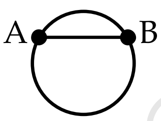
$$A\hat{E}B = A\hat{F}B$$

زاویه‌ی مرکزی:



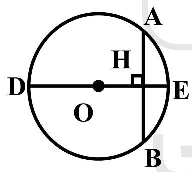
زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره و هر ضلع آن شعاع دایره باشد، زاویـه‌ی مرکـزی نامیـده مـی‌شـود. بنابـه قرارداد، اندازه‌ی کمان نظیر هر زاویه‌ی مرکزی در دایره، همان اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبه‌روی آن کمان در نظر گرفته می‌شود.

وتر:



پاره‌خطی است که دو نقطه‌ی متمایز از محیط یک دایره را بهم وصل می‌کنـد. وتـری کـه از مرکـز دایـره بگذرد قطر نامیده می‌شود که بزرگترین وتر دایره است.

نکات:



قضیه: در هر دایره قطر عمود بر هر وتر آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند و خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است. خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل می‌کند بر آن وتر عمود است و بالعکس.

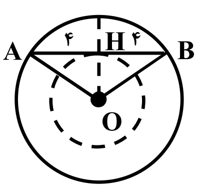
$$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB}$$

$$AH = HB$$

مثال: در دایره‌ی $C(O,۵)$، مکان هندسی وسط وترهایی به طول ۸، دایره‌ای به کدام شعاع است؟

۱) ٤　　۲) $۲\sqrt{۲}$　　۳) $\sqrt{۵}$　　٤) ۳

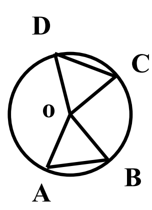
حل:



$$BH = \frac{AB}{۲} = ۴$$

$$OB^۲ - BH^۲ = OH^۲ \Rightarrow OH = ۳ = R'$$

قضیه: در یک دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و بالعکس.



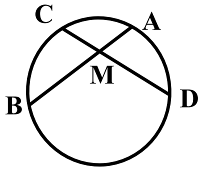
$$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

مثال: در شکل زیر دو وتر مساوی و متقاطع AB و CD در دایره مفروضند. در این صورت:

۱) $AD = BC$ ۲) $MD = MB$ ۳) $D\hat{B}C = A\hat{D}B$ ۴) همه‌ی موارد صحیح است.

حل:

داریم:



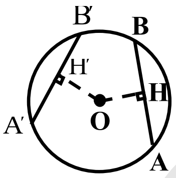
$$\mathbf{AB = CD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}}$$

$$\mathbf{\widehat{AD} + \widehat{DB} = \widehat{DB} + \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}}$$ (گزینه‌ی ۱)

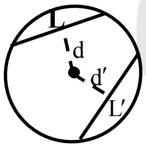
زوایای **ABC** و **ADC** هر دو رو به کمان **AC** می‌باشند لذا با هم برابرند. همین‌طور زوایای **ACD** و **BAC** با هم برابرند، لذا مثلث‌های **ADM,MBC** با هم برابرند. پس:

$$\mathbf{MD = MB \Rightarrow \left.\begin{matrix} A\hat{B}D = C\hat{D}B \\ A\hat{B}C = C\hat{D}A \end{matrix}\right\} \Rightarrow D\hat{B}C = A\hat{D}B}$$ (گزینه‌ی ۲) **(گزینهٔ ۳)**

قضیه: در هر دایره، وترهای مساوی، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بالعکس: $AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$



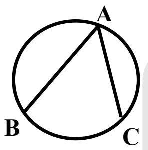
قضیه: در یک دایره، از دو وتر نابرابر، آن که بزرگتر است به مرکز دایره نزدیکتر است و بالعکس:



$$L > L' \Leftrightarrow d' > d$$

زاویه‌ی محاطی:

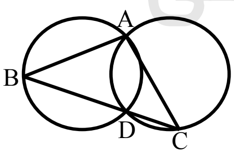
زاویه‌ای که رأسش روی دایره و ضلعهایش دو وتر از دایره باشند، زاویه‌ی محاطی نامیده می‌شود. کمانی از دایره را که به دو ضلع زاویه‌ی محاطی محدود و در داخل زاویه واقع است، کمان روبه‌رو به آن زاویه می‌نامند.



قضیه: اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است:

$$\mathbf{B\hat{A}C = \frac{\widehat{BC}}{۲}}$$

مثال: دو دایره متساوی در نقاط A و D متقاطعند. از نقطه D قاطع BC را نسبت به دو دایره رسم می‌کنیم. مثلث ABC همواره:



۱) متساوی الساقین است. ۲) قائم الزاویه است.

۳) قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین است. ۴) متساوی الاضلاع است.

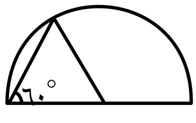
حل:

زوایای محاطی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ روبه‌رو به دو کمان مساویند لذا مساویند.

مثال: مثلث متساوی‌الاضلاعی را داخل نیم‌دایره‌ای به شعاع R طوری محاط کرده‌ایم که یک ضلع مثلث روی قطر نیم‌دایره قرار گرفته است. کمترین محیط برای این مثلث برحسب R کدام است؟

۱) $۲R$ ۲) $۳R$ ۳) $۲\sqrt{۲}R$ ۴) $۲\sqrt{۳}R$

حل:

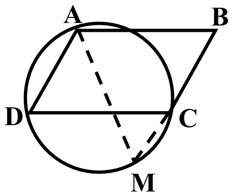


هرچه مثلث به سمت سر قطر حرکت می‌کند، ارتفاع آن کاهش می‌یابد. حداقل محیط مربوط به وقتی است که یک رأس مثلث سر قطر قرار گیرد که در این صورت سر دیگر روی مرکز دایره واقع می‌شود. لذا ضلع مثلث برابر شعاع دایره خواهد بود. پس کمترین محیط **۳R** است.

مثال: در متوازی‌الاضلاع ABCD دایره‌ی محیطی مثلث ACD امتداد ضلع BC را در نقطه‌ی M قطع کرده است. مثلث ABM چگونه است؟

۱) متشابه ACD ۲) متساوی‌الساقین ۳) متساوی‌الاضلاع ۴) قائم‌الزاویه

حل:



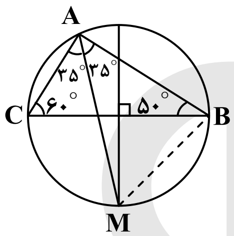
$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}=\hat{D}=\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}\\ \hat{D}=\hat{B}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{M}=\hat{B}$$

پس مثلث متساوی‌الساقین است.

مثال: در مثلث ABC، داریم $\hat{B}=50^\circ$ و $\hat{C}=60^\circ$. نیمساز داخلی زاویه‌ی A و عمودمنصف ضلع BC در نقطه‌ی M متقاطع‌اند، زاویه‌ی MBC چند درجه است؟

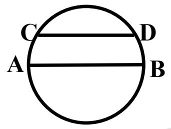
۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

حل: گزینه ۳ پاسخ است.



دایره‌ی محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. نیمساز زاویه‌ی A کمان BC را نصف می‌کند. عمودمنصف ضلع BC هم کمان BC را نصف می‌کند، پس نقطه‌ی برخورد نیم‌ساز زاویه‌ی A و عمودمنصف ضلع BC (نقطه‌ی M) روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC قرار دارد. بنابراین زاویه‌ی MBC برابر نصف کمان مقابلش است.

$$M\hat{B}C=\frac{\overset{\frown}{MC}}{2}=C\hat{A}M=35^\circ$$



قضیه: در هر دایره کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند و بالعکس.

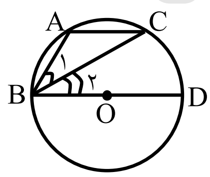
$$AB \parallel CD \Leftrightarrow BD=AC$$

مثال: در مثلث ABC، می‌دانیم: $\hat{A}+\hat{C}=150^\circ$. اگر $BD \parallel AC$ باشد. در مورد این مثلث کدام گزینه صحیح است؟

۱) این مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشد. ۲) این مثلث قائم‌الزاویه است.

۳) این مثلث متساوی‌الساقین است. ۴) این مثلث مختلف الاضلاع است.

حل:



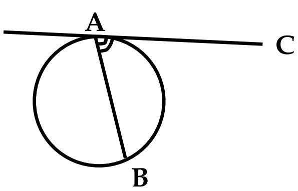
$$\left.\begin{array}{l}\hat{C}=\hat{B}_2\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AB}\\ \hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{CDB}}{2}=\dfrac{\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BD}}{2}\\ \hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}=\dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\hat{A}-\hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2}=90^\circ\\ \hat{A}+\hat{C}=150^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\hat{A}=120^\circ\\ \hat{C}=30^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}_1=30^\circ\Rightarrow$$

مثلث متساوی‌الساقین است

زاویه‌ی ظلی:

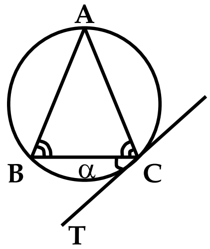
زاویه‌ای که رأسش روی دایره است، یک ضلعش دایره را قطع می‌کند و ضلع دیگرش بر دایره مماس است زاویه‌ی ظلی نامیده می‌شود.

قضیه: اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف کمان روبه‌روی آن است.



$$B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

☜مثال: در شکل روبه‌رو $AB = AC$، CT مماس بر دایره در نقطه C و $\widehat{AC} = ۱۴۰^\circ$ می باشد. اندازه‌ی زاویــه‌ی $B\hat{C}T$ کــدام است؟



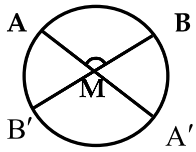
۱) ۸۰° ۲) ۶۰° ۳) ۴۰° ۴) ۲۰°

✍حل:

$$AB = AC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} = ۱۴۰^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = ۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{C}T = \frac{۸۰^\circ}{۲} = ۴۰^\circ$$

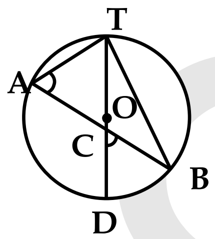
زاویه‌ی بین دو وتر:

زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود برابر نصف مجموع اندازه‌ی دو کمانی است که به ضلع‌ها و امتداد ضلع‌های آن زاویه محدودند.



$$A\hat{M}B = \frac{\widehat{AB} + \widehat{A'B'}}{۲}$$

☜مثال: در شکل مقابل O مرکز دایره، $\hat{A} = ۶۵^\circ$ و $\hat{B} = ۳۵^\circ$ می‌باشد، زاویه C چند درجه است؟

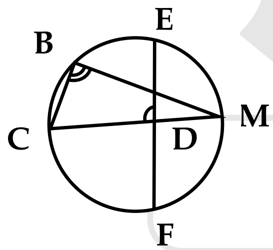


۱) ۶۰ ۲) ۶۱ ۳) ۶۲ ۴) ۶۳

✍حل:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \dfrac{\widehat{TB}}{۲} = ۶۵^\circ \Rightarrow \widehat{TB} = ۱۳۰^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = ۱۸۰^\circ - ۱۳۰^\circ = ۵۰^\circ \\ \hat{B} = \dfrac{\widehat{AT}}{۲} = ۳۵^\circ \Rightarrow \widehat{AT} = ۷۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C} = \frac{\widehat{AT} + \widehat{DB}}{۲} = \frac{۵۰^\circ + ۷۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$$

☜مثال: در شکل زیر M وسط کمان EF و $\widehat{BC} = ۵۰^\circ$ است. اندازه‌ی $\hat{B} + \hat{D}$ چند درجه است؟



۱) ۱۶۰
۲) ۱۷۵
۳) ۱۸۰
۴) ۲۳۰

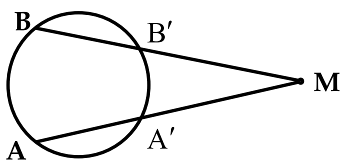
✍حل:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \dfrac{\widehat{CF} + \widehat{FM}}{۲} \\ \hat{D} = \dfrac{\widehat{BC} + \widehat{BE} + \widehat{FM}}{۲} \\ \widehat{FM} = \widehat{EM} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} + \hat{D} = \frac{\widehat{CF} + \widehat{FM} + \widehat{BC} + \widehat{BE} + \widehat{FM}}{۲} = \frac{\widehat{CF} + \widehat{FM} + \widehat{BC} + \widehat{BE} + \widehat{EM}}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$$

زاویه‌ی بین امتداد دو وتر:

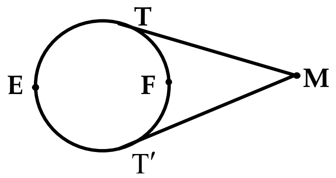
اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید، برابر قدر مطلق نصف تفاضل اندازه‌ی کمان‌هایی از آن دایره است که به اضلاع آن زاویه محدود است.

امتداد وترهای AA' و BB' از دایره (C) در نقطه‌ی M یکدیگر را قطع کرده‌اند.



$$A\hat{M}B = \frac{|AB - A'B'|}{۲}$$

در حالت خاص اگر دو وتر به دو مماس همرس تبدیل شود، داریم:

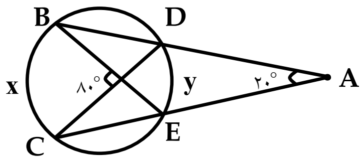


$$T\hat{M}T' = \frac{T\hat{E}T' - T\hat{F}T'}{۲}$$

☜**مثال: در شکل مقابل، اندازه‌ی کمان‌های x و y کدام است؟**

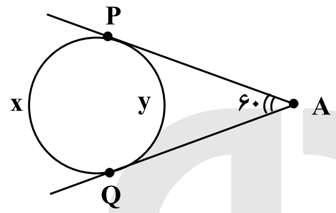
۱) $۱۰^\circ - ۸۰^\circ$ ۲) $۵۰^\circ - ۱۰۰^\circ$ ۳) $۶۰^\circ - ۱۰۰^\circ$ ۴) $۸۰^\circ - ۷۰^\circ$

✍**حل:**



$$\left.\begin{array}{l} ۸۰^\circ = \dfrac{x+y}{۲} \Rightarrow x+y = ۱۶۰^\circ \\ ۲۰^\circ = \dfrac{x-y}{۲} \Rightarrow x-y = ۴۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow x = ۱۰۰^\circ \quad y = ۶۰^\circ$$

☜ **مثال: در شکل روبه‌رو، $۲x - ۳y$ کدام است؟**



۱) ۸۰°

۲) ۱۰۰°

۳) ۱۲۰°

۴) ۱۴۰°

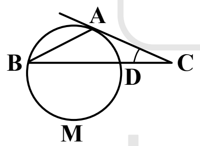
✍ **حل:** گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} x+y = ۳۶۰^\circ \\ \dfrac{x-y}{۲} = ۶۰^\circ \Rightarrow x-y = ۱۲۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲x = ۴۸۰^\circ \Rightarrow x = ۲۴۰^\circ \Rightarrow y = ۱۲۰^\circ$$

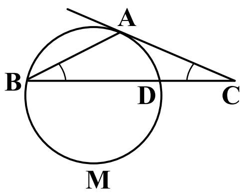
پس:

$$۲x - ۳y = ۴۸۰^\circ - ۳۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

☜ **مثال: در شکل مقابل، مماس AC بر دایره با وتر AB از دایره برابرند. اگر کمان $\widehat{DMB}$ برابر ۲۲۲ درجه باشد، زاویه‌ی C چند درجه است؟**



✍ **حل:**



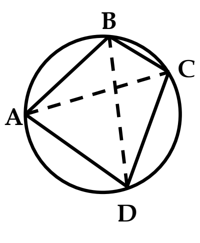
$$\hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \widehat{AD} = ۲C$$

$$\widehat{BAD} = ۳۶۰^\circ - ۲۲۲^\circ = ۱۳۸^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AD}}{۲} = \frac{۱۳۸^\circ - ۲C - ۲C}{۲} = ۶۹^\circ - ۲C$$

$$\Rightarrow ۳\hat{C} = ۶۹^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۲۳^\circ$$

چند ضلعی محاطی:



اگر همه‌ی رأس‌های یک چندضلعی روی یک دایره قرار داشته باشد، چندضلعی را محاطی یا محاط در دایره می‌نامند.

شرط لازم و کافی برای آن که یک چهارضلعی محاطی باشد این است که مجموع زوایای مقابل آن ۱۸۰° باشد.

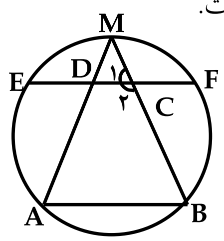
عمودمنصف‌های اضلاع چهارضلعی محاطی در یک نقطه همرسند که همان مرکز دایره محیطی آن است.

نکته: مربع، مستطیل و ذوزنقه متساوی‌الساقین محاطی‌اند.

مثال: از نقطه‌ی M وسط کمان EF از یک دایره دو وتر MA و MB را رسم می‌کنیم به گونه‌ای کـه وتـر EF را در نقـاط D,C قطع کند. چهارضلعی $ABCD$ همواره:

۱) لوزی است. ۲) ذوزنقه است. ۳) محیطی است. ٤) محاطی است.

حل:



$$\left.\begin{aligned}\hat{A}&=\frac{MF+FB}{۲}\\ \hat{C}_۱&=\frac{EM+FB}{۲}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \hat{A}=\hat{C}_۱$$

$$\hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{C}_۲=۱۸۰^\circ$$

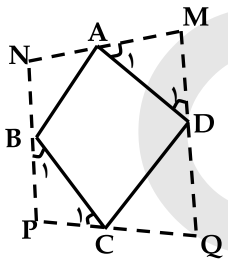
چهارضلعی محاطی است.

مثال: چهارضلعی حاصل از تقاطع نیمسازهای زوایای خارجی یک چهارضلعی محدب همواره ....

۱) یک ذوزنقه است. ۲) یک چهارضلعی محاطی است.

۳) یک چهارضلعی محیطی است. ٤) هیچ‌کدام.

حل:



$$\hat{M}+\hat{P}=۱۸۰^\circ-\hat{A}_۱-\hat{D}_۱+۱۸۰^\circ-\hat{B}_۱-\hat{C}_۱=۳۶۰-(\hat{A}_۱+\hat{B}_۱+\hat{C}_۱+\hat{D}_۱)$$

مجموع زوایای خارجی n ضلعی محدب ۳۶۰° است. چون این زوایـا نیمسـاز زوایـای خـارجی هستند پس:

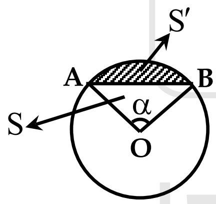
$$\hat{A}_۱+\hat{B}_۱+\hat{C}_۱+\hat{D}_۱=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{M}+\hat{P}=۳۶۰^\circ-۱۸۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

لذا چهارضلعی محاطی است.

محیط و مساحت دایره:

مساحت دایره‌ای به شعاع R برابر است با: $\pi R^۲$

مساحت قطاع دایره با زاویه α (برحسب رادیان) به این ترتیب به‌دست می‌آید:

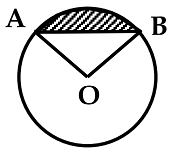


$$\left.\begin{matrix}۲\pi & \pi R^۲\\ \alpha & S\end{matrix}\right\}\Rightarrow S=\frac{\alpha R^۲}{۲} \qquad S'=\frac{۱}{۲}R^۲(\alpha-\sin\alpha)$$

محیط دایره‌ای به شعاع R برابر است با $۲\pi R$، همچنین طول قوس AB در قطاع فوق برابر است با $R\alpha$

نکته: بین همه‌ی شکل‌های مسطح با محیط ثابت، دایره بیش‌ترین مساحت را دارد. و بین همه شکل‌های با مساحت ثابت، دایـره کمتـرین محیط را دارد.

مثال: در شکل مقابل، O مرکز دایره و $A\hat{O}B=۹۰^\circ$ است. مساحت قسمت هاشورخورده چیست؟



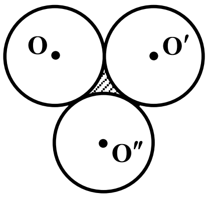
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{٤}R^۲$ ۲) $\frac{۱}{۲}R^۲$

۳) $\frac{\pi R^۲}{٤}-\frac{R^۲}{۲}$ ٤) $\frac{\pi R^۲}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{٤}R^۲$

حل:

$$\alpha=\frac{\pi}{۲}(rad) \Rightarrow S=\frac{R^۲}{۲}(\alpha-\sin\alpha)=\frac{R^۲}{۲}(\frac{\pi}{۲}-۱)=\frac{\pi R^۲}{۴}-\frac{R^۲}{۲}$$

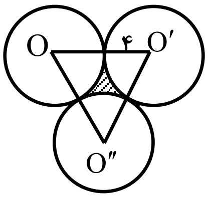
☜**مثال: مساحت بخش هاشور خورده کدام است؟ (دوایر متساوی می‌باشند)**



۱) $16\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$ ۲) $16\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

۳) $8\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{4}\right)$ ۴) $8\left(2\sqrt{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

✍**حل:**



مساحت مطلوب = مساحت مثلث $\mathbf{oo'o''}$ − $3\times\frac{1}{6}\times$ مساحت یکی از دوایر

مثلث $\mathbf{oo'o''}$ متساوی‌الاضلاع است و طول ضلع آن $\mathbf{a=2R=8}$ می‌باشد.

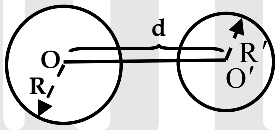
$$\mathbf{S=\frac{64\times\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\times\pi\times16=16\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)}$$

وضع دو دایره نسبت به هم:

دو دایره می‌توانند متقاطع، مماس بیرون، متخارج، متداخل و مماس درون باشند. در حالت خاص، دو دایره متداخل می‌توانند هم‌مرکز باشند:

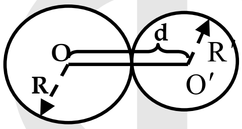
۱- دو دایره‌ی متخارج (بیرون هم):

$d > R + R'$



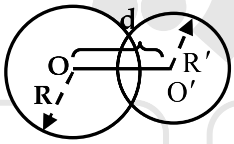
۲- دو دایره‌ی مماس بیرون:

$d = R + R'$



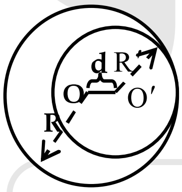
۳- دو دایره‌ی متقاطع:

$|R - R'| < d < R + R'$



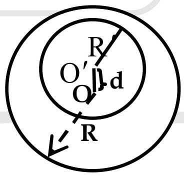
٤- دو دایره‌ی مماس درون:

$d = |R - R'|$



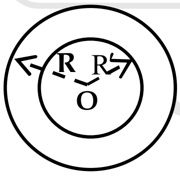
۵- دو دایره‌ی متداخل (درون هم):

$d < |R - R'|$



٦- دو دایره‌ی هم مرکز (حالت خاص دو دایره متداخل):

$d = 0$



☜**مثال: دو دایره $C(O,5)$ و $C(O',3)$ که در آن $OO' = 7$ می‌باشد، چه وضعی نسبت به هم دارند؟**

۱) متداخلند.   ۲) متقاطعند.   ۳) متخارجند.   ٤) مماس درونی‌اند.

✍**حل:** گزینه‌ی ۲ صحیح است.

$$\mathbf{|R-R'| < OO' = d < R+R'}$$
$$\mathbf{2 < 7 < 8}$$
$\Rightarrow$ دو دایره متقاطعند

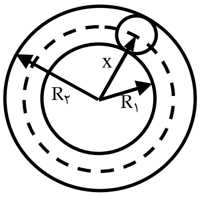
☜**مثال: دو دایره‌ی به شعاع‌های ۱ و ۲ هم مرکزند. مکان هندسی مرکز دایره ای که بر آن‌ها مماس باشد، کدام است؟**

۱) دو دایره به شعاع‌های $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ ۲) دو دایره به شعاع‌های $\frac{3}{2}$ و ۲

۳) دایره ای به شعاع $\frac{3}{2}$ ٤) دایره ای به شعاع $\frac{1}{2}$

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است.

در حالت اول دایره‌ی متحرک بر دایره‌ی بزرگتر مماس داخل و بر دایره‌ی کوچکتر مماس خارج است.

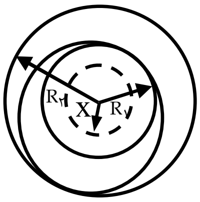


لذا شعاع دایره‌ی متحرک را یک‌بار بر اساس شعاع دایره‌ی بزرگتر و بار دیگر بر اساس شعاع دایره‌ی کوچکتر بازنویسی می‌کنیم و دو عبارت را برابر قرار می‌دهیم:

$$R_۲ - X = X - R_۱ \to X = \frac{R_۱ + R_۲}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

لذا چون فاصله از مرکز ثابت است، مکان هندسی مراکز دوایر متحرک دایره ایست به همان مرکز و شعاع X

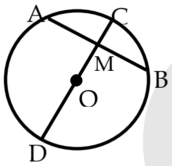
در حالت دوم دایره‌ی متحرک بر هر دو دایره مماس داخل است.



لذا شعاع دایره‌ی متحرک را یک‌بار بر اساس شعاع دایره‌ی بزرگتر و بار دیگر بر اساس شعاع دایره‌ی کوچکتر بازنویسی می‌کنیم و دو عبارت را برابر قرار می‌دهیم:

$$R_۲ - X = X + R_۱ \to X = \frac{R_۲ - R_۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

رابطه‌های طولی در دایره:



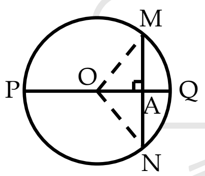
۱- وتر مینیمم: از نقطه مفروض M در داخل دایره بی‌شمار وتر می‌گذرد، که کوچک‌ترین آن‌ها بر OM عمود است و آن را وتر مینیمم نقطه‌ی M می‌نامند. همچنین بزرگ‌ترین آن‌ها از O و M می‌گذرد که قطری از دایره است.

وتر مینیمم = AB   وتر ماکزیمم = CD

☜ **مثال: نقطه‌ی A به فاصله $\frac{R}{۲}$ از مرکز دایره‌ی $C(O,R)$ قرار دارد. نسبت اندازه‌ی وتر مینیمم به اندازه‌ی وتر ماکزیمم گذرا از نقطه‌ی A کدام است؟**

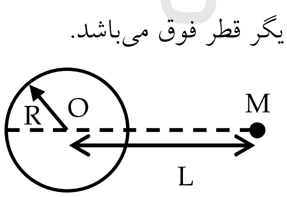
۱) ۱   ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ٤) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

حل:



$$\left.\begin{array}{l} MN = ۲\left(\sqrt{R^۲ - \frac{R^۲}{۴}}\right) = R\sqrt{۳} \\ PQ = ۲R \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MN}{PQ} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۲- بیشترین و کمترین فاصله از دایره: بیشترین فاصله هر نقطه بیرون دایره از یک دایره برابر فاصله آن نقطه از سر قطری از دایره است که امتداد آن از نقطه مورد نظر در بیرون دایره می‌گذرد و کمترین فاصله مربوط به فاصله نقطه مورد نظر از سر دیگر قطر فوق می‌باشد.



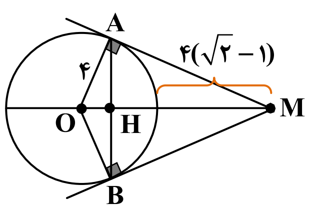
فاصله نقطه مورد نظر از مرکز دایره = L

بیشترین فاصله نقطه‌ی M از نقاط دایره = $L + R$

کمترین فاصله نقطه‌ی M از نقاط دایره = $L - R$

☜ **مثال: از نقطه M واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ٤ واحد، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده است. اگر فاصله نقطه M تا نزدیکترین نقاط دایره $۴(\sqrt{۲}-۱)$ باشد، فاصله مرکز دایره از وتر AB چقدر است؟**

حل:



$$MO = ۴\sqrt{۲} - ۴ + ۴ = ۴\sqrt{۲}$$

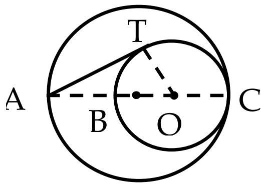
با توجه به خواص مثلث قائم‌الزاویه:

$$OA^۲ = OH \times OM \Rightarrow ۴^۲ = OH \times ۴\sqrt{۲} \Rightarrow OH = \frac{۴^۲}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

☜مثال: دو دایره با شعاع‌های ۹ و ۱۲ واحد مماس درونی‌اند. اندازه‌ی بزرگترین قطعه‌ی مماسی که یک سر آن بر روی دایره‌ی بزرگ‌تر و سر دیگر آن (نقطه‌ی تماس) بر روی دایره‌ی کوچک‌تر باشد، کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۸

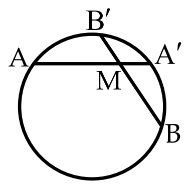
✍حل:



چون $AT^{۲} = AO^{۲} - R^{۲}$ پس هرچه AO بزرگتر باشد، AT بزرگتر است. ماکزیمم AO هنگامی است که A روی امتداد قطر گذرنده از O قرار بگیرد:

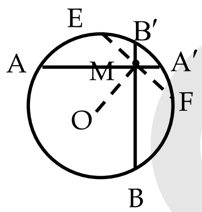
$$AT^{۲} = ۱۵^{۲} - ۹^{۲} = ۱۲^{۲} \rightarrow AT = ۱۲$$

۳- روابط بین طول وترها: از نقطه‌ی M واقع در داخل دایره (C) دو وتر دلخواه AA' و BB' رسم شده‌اند. در این‌صورت داریم:



$$MA.MA' = MB.MB'$$

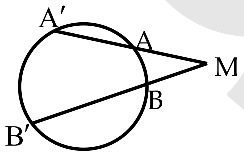
و اگر دو پاره‌خط AA' و BB' در نقطه‌ی M طوری یکدیگر را قطع کنند که: $MA.MA' = MB.MB'$، آن‌گاه چهار نقطه A، A'، B و B' روی یک دایره‌اند.



نکته: اگر ME و MF کوتاهترین وتر را بسازند:

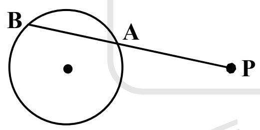
$$ME^{۲} = MF^{۲} = MA.MA' = MB.MB'.$$

مشابه همین رابطه اگر امتداد وترهای AA' و BB' از دایره (C) یکدیگر را در نقطه‌ی M خارج دایره قطع کنند، خواهیم داشت:

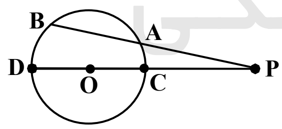


$$MA.MA' = MB.MB'$$

☜مثال: نزدیک‌ترین نقطه از دایره به شعاع ۵ واحد تا نقطه‌ی مفروض P برابر ۸ واحد است. قاطع PAB نسبت به دایره طوری رسم شده است که $PA - AB = ۲$. اندازه‌ی AB چقدر است؟



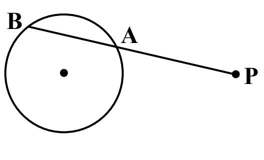
✍حل:



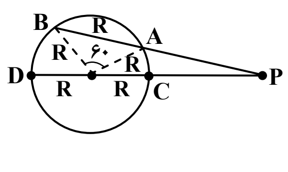
$$\left.\begin{array}{l} PC = ۸ \\ PD = ۱۰ + ۸ = ۱۸ \\ PA(PA + AB) = ۸ \times ۱۸ \\ PA - AB = ۲ \Rightarrow PA = AB + ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow (AB + ۲)(AB + ۲ + AB) = ۸ \times ۱۸$$

$$\Rightarrow ۲(AB + ۲)(AB + ۱) = ۸ \times ۱۸ \Rightarrow (AB + ۲)(AB + ۱) = ۸ \times ۹ \Rightarrow AB + ۱ = ۸ \Rightarrow AB = ۷$$

☜مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی P تا دورترین نقاط یک دایره سه برابر شعاع دایره است. از این نقطه قاطع PAB نسبت به دایره رسم شده است. اگر کمان AB برابر ۶۰ درجه باشد، اندازه‌ی PA چند برابر شعاع دایره است؟



✍حل:



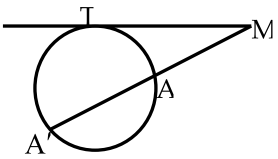
$$PD = ۳R \Rightarrow PC = R$$

$$PA \times PB = PC \times PD \Rightarrow PA \times (PA + R) = R \times (۳R)$$

$$\Rightarrow (PA)^{۲} + R(PA) - ۳R^{۲} = ۰$$

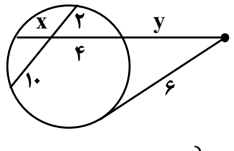
$$PA = \frac{-R \pm \sqrt{R^{۲} + ۱۲R^{۲}}}{۲} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱۳}}{۲}R \Rightarrow PA = \frac{\sqrt{۱۳} - ۱}{۲}$$

قضیه: اگر از یک نقطه یک مماس و یک قاطع نسبت به دایره رسم کنیم، قطعه‌ی محصور بین آن نقطه و نقطه تماس از خط مماس، واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ی قاطع است و بالعکس.



$$MT^{2} = MA.MA'$$

☜ **مثال: در شکل مقابل $2x - y$ کدام است؟**

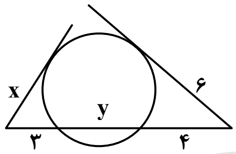


✍ **حل:**

با توجه به روابط طولی در دایره داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۶^{۲} = y \times (y + ۴ + x) \\ ۲ \times ۱۰ = ۴ \times x \rightarrow x = ۵ \end{array}\right\} \rightarrow y \times (y + ۹) = ۳۶ = ۳ \times ۱۲ \Rightarrow y = ۳ \Rightarrow ۲x - y = ۷$$

☜ **مثال: در شکل مقابل اندازه‌ی x چند واحد است؟**



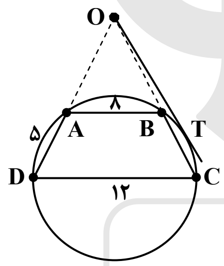
✍ **حل:**

$$۶^{۲} = ۴(۴ + y) \Rightarrow ۴ + y = \frac{۳۶}{۴} = ۹ \Rightarrow y = ۵$$

$$x^{۲} = ۳(۳ + y) = ۳ \times ۸ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۶}$$

☜ **مثال: ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و اندازه یک ساق برابر ۵ واحد مفروض است. اگر این ذوزنقه قابل محاط در دایره باشد، طول قطعه مماس که از نقطه تلاقی دو ساق بر دایره محیطی آن رسم شود، کدام است؟**

✍ **حل:**

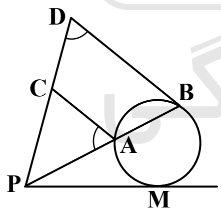


ذوزنقه‌ی محاطی حتماً متساوی‌الساقین است. از تشابه مثلث‌های OAB و OCD داریم:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OD} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{OA}{OA + ۵} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{OA}{۵} = \frac{۲}{۱} \Rightarrow OA = ۱۰$$

$$\Rightarrow OT^{۲} = OA \times OD = ۱۰ \times ۱۵ \Rightarrow OT = ۵\sqrt{۶}$$

☜ **مثال: در شکل مقابل $P\hat{A}C = P\hat{D}B$، $PC = ۹$ و $CD = ۷$. اندازه‌ی مماس PM چقدر است؟**



✍ **حل:**

$$PCA \simeq PDB \Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PD}$$

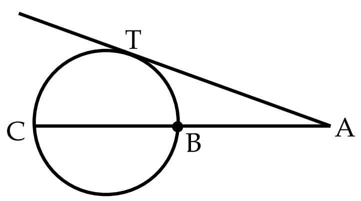
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} PA \cdot PB = PC \cdot PD = ۹ \times (۹ + ۷) = ۹ \times ۱۶ \\ PM^{۲} = PA \cdot PB \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow PM^{۲} = ۹ \times ۱۶ \Rightarrow PM = ۳ \times ۴ = ۱۲$$

☜**مثال: سه نقطه‌ی C,B,A مانند شکل مقابل روی یک خط قرار دارند. از C,B بی‌شمار دایره می‌گذرد. مکان هندسی نقطه‌ی تماس مماسهایی که از نقطه‌ی A بر آن‌ها می‌توان رسم کرد، کدام است؟**

۱) خطی است عمود بر AB
۲) خطی است موازی با AB
۳) دایره است به مرکز A
۴) دایره است به مرکز B

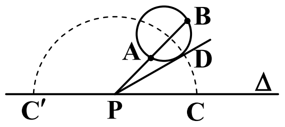
✍ **حل:** گزینه‌ی ۳ صحیح است.



$$AT^{۲} = AB \times AC = \text{مقدار ثابت}$$

لذا مکان هندسی مورد نظر، دایره‌ای است به مرکز **A** و شعاع **AT**.

مثال: نقطه‌ی P مرکز نیم‌دایره به قطر CC' است. شعاع PD مماس بر دایره‌ی مفروض گذرا از A و B رسم شده است. دایره‌ای که از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد و مماس بر خط Δ است، در کدام نقطه بر خط Δ مماس می‌شود؟

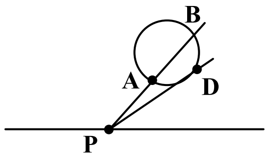


۱) C یا C' ۲) بین دو نقطه‌ی C و C'

۳) خارج پاره‌خط $C'C$ ۴) نشدنی

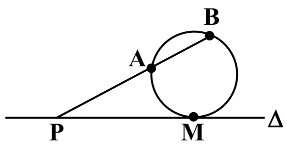
حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است.

اولین موضوعی که در این سؤال جلب توجه می‌کند این است که:



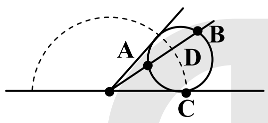
$$PD^{2} = PA.PB$$

حال اگر دایره گذرنده از A و B بر خط Δ مماس شود، خواهیم داشت:



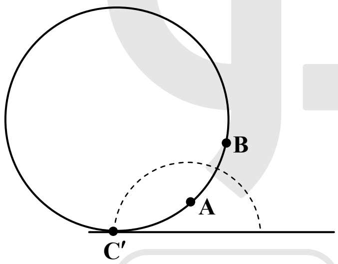
$$PM^{2} = PA.PB$$

با مقایسه ۲ رابطه فوق خواهیم داشت:



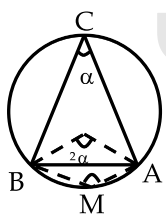
$$PM^{2} = PD^{2}$$

یعنی طول PM با طول PD برابر است اما برای PM، ۲ جواب وجود دارد و چون PD شعاع دایره خط‌چین می‌باشد پس ۲ جواب M، نقاط C و C' می‌باشد.



کمان در خور یک زاویه:

مکان هندسی رأس زاویه‌ای برابر α که ضلع‌هایش از دو نقطه ثابت می‌گذرند، کمان‌هایی از دو دایره‌ی مساوی است که از آن دو نقطه‌ی ثابت می‌گذرند و زاویه‌ی مرکزی رو به رو به وتر مشترک آن‌ها برابر 2α است. این کمان، کمان در خور زاویه‌ی α نامیده می‌شود.



نکته ۱: نقاط A و B جزء کمان در خور زاویه‌ی α نیستند.

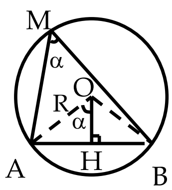
نکته ۲: کمان در خور زاویه‌ی 90° روبه‌رو به پاره‌خط AB، دایره‌ای به قطر AB است.

نکته ۳: کمان $\overset{\frown}{AMB}$ و کمان نظیر آن از دایره دوم، کمان در خور نظیر پاره‌خط AB و زاویه $180-\alpha$ می‌باشد.

نکته۴: شعاع دایره‌ای که کمان در خور زاویه‌ی α رو به پاره‌خط $AB = a$ بخشی از آن است برابر است با:

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

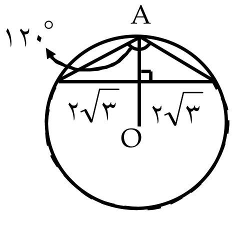
فاصله مرکز دایره از وتر AB برابر $OH = \frac{a}{2|\tan\alpha|}$ می‌باشد.



مثال: مثلثی با معلومات $a=۴\sqrt{۳}$، $\widehat{A}=۱۲۰^\circ$ و h_a قابل رسم است. h_a کدام عدد <u>نمی‌تواند</u> باشد؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ٤) ۳

حل:



مکان هندسی رأس A، کمان در خور زاویه‌ی ۱۲۰° رو به پاره‌خط $BC=a$ است. ضمن تغییر مکان A روی کمان، ماکزیمم مقدار ارتفاع، مربوط به حالتی است که A روی انتهای شعاع عمود بر پاره‌خط BC قرار بگیرد. (عمودمنصف BC) در این حالت $h_a=۲\sqrt{۳}\cot۶۰^\circ=۲\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}=۲$. لذا حدود تغییر h_a، $۰<h_a\le۲$ است. پس h_a نمی‌تواند برابر ۳ باشد.

ترسیم‌های هندسی در دایره:

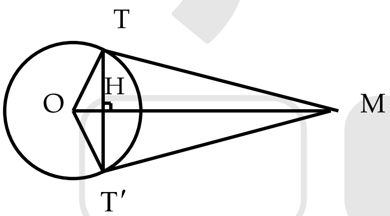
خطهای قاطع و مماس نسبت به دایره:

خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع کند، قاطع نسبت به دایره یا به طور خلاصه قاطع نامیده می‌شود.

خط L که دایره را فقط و فقط در نقطه‌ی A روی دایره قطع می کند، خط مماس بر دایره در نقطه‌ی A می‌نامیم. نقطه‌ی A را نقطه‌ی تماس می‌نامیم.

نکته: از هر نقطه خارج یک دایره می‌توان دو خط مماس بر آن دایره رسم نمود.

قضیه: اگر دو خط MT و MT' بر دایره $C(O,R)$ مماس باشند، داریم:



۱- $\widehat{OTM}=۹۰^\circ$ (شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است.)

۲- $MT=MT'$

۳- OM نیمساز $\widehat{TMT'}$ و $\widehat{TOT'}$ است.

٤- OH عمودمنصف TT' است.

۵- $OH.OM=R^۲$

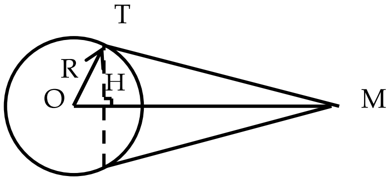
٦- $TT'^۲=٤OH.HM$

۷- $TT'.OM=۲R.MT$

مثال: از نقطه‌ی M خارج دایره‌ی $C(O,R)$ دو مماس بر دایره رسم شده است. اگر پاره‌خطی که از دو نقطه‌ی تماس می‌گذرد، OM را به دو قسمت به طول‌های ۲ و ٦ تقسیم کند، طول مماس چقدر است؟

۱) ٤ ۲) $\sqrt{٤۸}$ ۳) ۸ ٤) گزینه‌ی ۱ یا ۲ صحیح است.

حل:



$$OM=OH+HM=۶+۲=۸$$

$$R^۲=OH.OM=۸\times۲=۱۶\Rightarrow R=۴$$

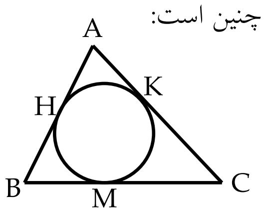
$$MT=\sqrt{OM^۲-R^۲}=\sqrt{۶۴-۱۶}=\sqrt{۴۸}$$

تا این‌جا فرض کرده‌ایم $MH>OH$ ولی حالتی نیز وجود دارد که $HM<OH$ که در این حالت:

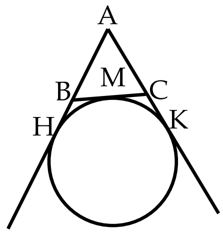
$$R'^۲=OH'.OM=۶\times۸=۴۸\Rightarrow R'=\sqrt{۴۸}$$

$$MT^۲=OM^۲-R'^۲\Rightarrow MT=\sqrt{۶۴-۴۸}=۴$$

نکته: پاره‌خط‌هایی که دایره‌ی محاطی داخلی مثلث روی اضلاع آن جدا می‌کند، برحسب طول اضلاع مثلث چنین است:



$$AH = AK = p - a$$
$$BH = BM = p - b$$
$$CM = CK = p - c$$



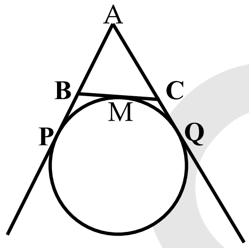
پاره‌خط‌هایی که دایره‌ی محاطی خارجی رأس A روی ضلع a و روی امتداد دو ضلع c, b جدا می‌کند بر حسب طول اضلاع مثلث چنین است:

$$AH = AK = p$$
$$BH = BM = p - c$$
$$CM = CK = p - b$$

☜ **مثال: در شکل مقابل با حرکت نقطه‌ی M روی محیط دایره و بین نقاط Q, P، مساحت و محیط مثلث چگونه‌اند؟**

۱) مساحت ثابت و محیط ثابت
۲) مساحت ثابت و محیط متغیر
۳) مساحت متغیر و محیط ثابت
٤) مساحت متغیر و محیط متغیر

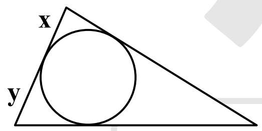
✍ **حل:**



$$\mathbf{p = AP = AQ \Rightarrow ۲p = ۲AP = ۲AQ}$$

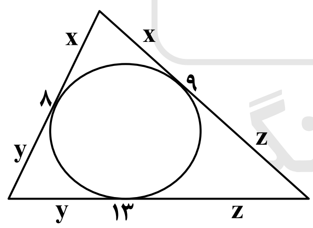
با حرکت **M** روی محیط دایره طول مماس‌های **AP** و **AQ** ثابت می‌ماند، لذا محیط مثلث ثابت است. اما ملاحظه می‌کنیم با نزدیک شدن **M** به نقاط **Q, P** مساحت مثلث به صفر میل می‌کند، لذا مساحت متغیر است.

☜ **مثال: دایره‌ی محاطی داخلی یک مثلث به طول اضلاع ۱۳، ۹ و ۸، در نقطه‌ی تماس کوچک‌ترین ضلع را به ۲ قطعه تقسیم می‌کند. نسبت آن دو قطعه کدام است؟**



۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $\frac{۳}{۷}$
٤) $\frac{۲}{۳}$

✍ **حل:** گزینه ۱ پاسخ است.



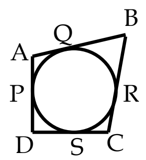
$$\left.\begin{array}{l} x+y=۸ \\ x+z=۹ \\ y+z=۱۳ \end{array}\right\} \oplus \Rightarrow ۲(x+y+z)=۳۰ \Rightarrow x+y+z=۱۵$$

بنابراین $x=۲$، $y=۶$ و $z=۷$ می‌باشد، در نتیجه: $\frac{x}{y}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

چند ضلعی محیطی:

هرگاه همه‌ی ضلع‌های یک چندضلعی بر یک دایره مماس باشد، چند ضلعی را محیطی یا محیط بر دایره می‌نامند.

شرط لازم و کافی برای این که یک چهارضلعی محیطی باشد آن است که مجموع دو ضلع مقابل آن مساوی باشد با مجموع دو ضلع دیگر مقابل به هم:



$$AB + CD = BC + AD$$

نیمسازهای داخلی چهارضلعی محیطی در یک نقطه همرسند که همان مرکز دایره‌ی محاطی چهارضلعی است.

مساحت هر چهارضلعی محیطی با حاصل‌ضرب محیط آن در نصف شعاع دایره‌ی محاطی برابر است.

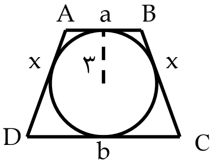
$$S = \frac{R}{۲} \times ۲p$$

نکته: لوزی، مربع و مثلث محیطی‌اند و ذوزنقه متساوی‌الساقین ممکن است محیطی باشد.

☜ **مثال: یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع $R = 3$ محیط است. اگر مساحت ذوزنقه ۴۵ واحد مربع باشد، طول ساق آن کدام است؟**

۱) ۷ ۲) ۷.۵ ۳) ۸ ۴) ۸.۵

✍**حل:**



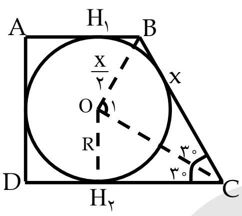
$$\frac{(a+b)}{2}\times 6 = 45 \Rightarrow a+b = 15$$

$$a+b = x+x = 2x = 15 \Rightarrow x = 7.5$$

☜**مثال: دایره‌ی $C(O,1/5)$ در یک ذوزنقه‌ی قائم محاط است. اگر یک زاویه‌ی ذوزنقه 60° باشد، محیط آن برابر کدام است؟**

۱) $2\left(3+\sqrt{3}\right)$ ۲) $2\left(3+2\sqrt{3}\right)$ ۳) $3\left(3+\sqrt{3}\right)$ ۴) $\left(3+2\sqrt{3}\right)$

✍**حل:**



$$x^2 = \frac{x^2}{4} + 4R^2 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 = 9 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

$$2p = AB+BC+DC+AD = AH_1 + 2\left(\overbrace{BH_1 + CH_2}^{x}\right) + DH_2 + AD = 2(AD+x) = 2\left(3+2\sqrt{3}\right)$$

☜**مثال: سه نیمساز داخلی یک چهارضلعی از یک نقطه می‌گذرند. اگر اندازه‌ی سه ضلع متوالی آن چهارضلعی به‌ترتیب ۷۲، ۱۰۷ و ۹۱ باشند، اندازه‌ی ضلع چهارم آن کدام است؟**

۱) ٥٦ ۲) ۸۸ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲٦

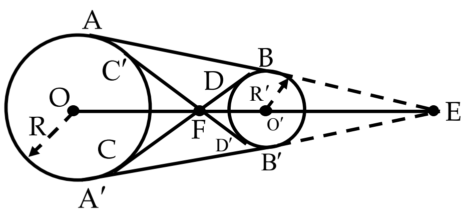
✍**حل:**

همان‌طور که گفته شد، یک چهارضلعی را محیطی گویند هرگاه اضلاع آن بر دایره‌ای مماس باشد یا به عبارت دیگر نقطه ای درون آن یافت شود که از چهار ضلع به یک فاصله باشد. وقتی نیمساز سه زاویه از یک چهارضلعی در نقطه ای همرس باشند نیمساز زاویه‌ی چهارم نیز از آن نقطه عبور خواهد کرد و در نتیجه آن نقطه از تمامی اضلاع به یک فاصله خواهد بود. پس می‌تواند مرکز دایره‌ی محاطی آن چهارضلعی باشد و چهارضلعی مذکور محیطی باشد، درنتیجه داریم: $a+c = b+d \Rightarrow 163 = 107+d \Rightarrow d = 56$

مماس مشترک دو دایره:

مماس مشترک دو دایره خطی است که بر هر دو دایره مماس باشد. اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند، این خط مماس مشترک خارجی و اگر دو دایره در دو طرف خط مماس باشند، این خط مماس مشترک داخلی دو دایره نامیده می‌شود.

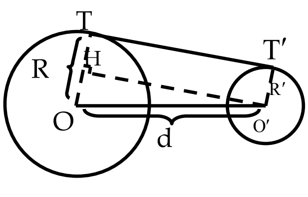
دو دایره‌ی متخارج دارای دو مماس مشترک خارجی $A'B'$ و AB و دو مماس مشترک داخلی CD و $C'D'$ هستند. نقطه‌ی تلاقی مماس مشترک‌های خارجی و نقطه تلاقی مماس مشترک‌های داخلی روی خط‌المرکزین و امتداد آن هستند و خط‌المرکزین را به یک نسبت تقسیم می‌کنند:



$$\frac{FO'}{FO} = \frac{EO'}{EO} = \frac{R'}{R}$$

اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره:

برای به‌دست آوردن اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره به طریق زیر عمل می‌کنیم:



$$\left.\begin{aligned} OO'^2 &= OH^2 + O'H^2 \\ d^2 &= (R-R')^2 + TT'^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad TT' = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}$$

مثال: اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ واحد است. خط‌المرکزین این دو دایره چند واحد است؟

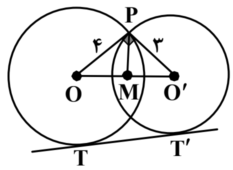
حل:

$$۱۵=\sqrt{d^۲-(۱۴-۶)^۲} \Rightarrow d^۲-۶۴=۲۲۵ \Rightarrow d^۲=۲۸۹ \Rightarrow d=۱۷$$

یادتان باشد ۸ و ۱۵ و ۱۷ اعداد فیثاغورسی‌اند!

مثال: در دو دایره‌ی متقاطع به مراکز O و O' و شعاع‌های ۳ و ٤ واحد، فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو دایره از وسط OO' برابر $\frac{۱}{۲}OO'$ می‌باشد. اندازه‌ی مماس مشترک محدود به دو نقطه‌ی تماس این دو دایره چند واحد است؟

حل:



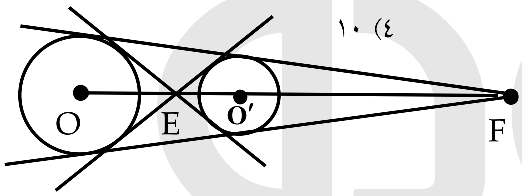
اگر در مثلثی میانه‌ی وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است. پس مثلث OPO' قائم‌الزاویه است، پس: $OO'=۵$

$$TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}=\sqrt{۵^۲-(۴-۳)^۲}=\sqrt{۲۴}=۲\sqrt{۶}$$

مثال: دو دایره C و C' به مرکزهای O و O' به شعاع‌های ۳ و ۵ به فاصله‌ی $OO'=۱۶$ مفروض است، فاصله‌ی محل تلاقی مماس مشترک‌های داخلی و خارجی کدام است؟

۱) ٤۰ ۲) ۳۰ ٤) ۲۰ ٤) ۱۰

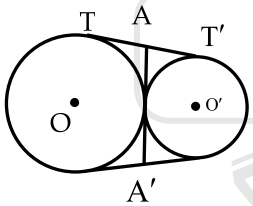
حل:

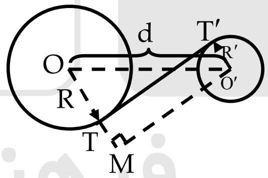


$$\left.\begin{array}{l}\frac{EO}{EO'}=\frac{R}{R'}\rightarrow\frac{۱۶-EO'}{EO'}=\frac{۵}{۳}\rightarrow EO'=۶\\ \frac{FO'}{FO}=\frac{R'}{R}\rightarrow\frac{FO'}{FO'+۱۶}=\frac{۳}{۵}\rightarrow FO'=۲۴\end{array}\right\}\Rightarrow EF=EO'+O'F=۶+۲۴=۳۰$$

اندازه‌ی مماس مشترک داخلی دو دایره:

برای به‌دست آوردن اندازه‌ی مماس مشترک داخلی دو دایره به طریق زیر عمل می‌کنیم:

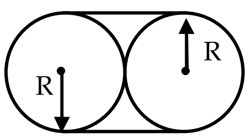




$$\left.\begin{array}{l}TT'^۲+OM^۲=OO'^۲\\ TT'^۲+(R+R')^۲=d^۲\end{array}\right\}\Rightarrow \quad TT'=\sqrt{d^۲-(R+R')^۲}$$

نکته: در دو دایره‌ی مماس بیرون داریم: $TT'=۲\sqrt{RR'}=AA'$

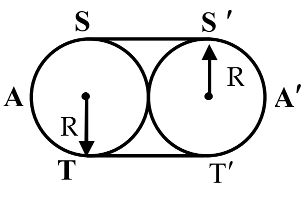
مثال: در شکل مقابل، شعاع دو دایره برابر R می‌باشد. طول نخی که دور آن‌ها بسته شده است، چقدر است؟



۱) $۲R+\pi R$ ۲) $۲(R+\pi R)$

۳) $٤R+۲\pi R$ ٤) $٤\pi R$

حل:



نخ را به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم: $TAS, T'A'S', SS', TT'$. داریم:

$TAS=T'A'S'$ مربع است $TT'S'S \Rightarrow TT'=SS'$

طول کمان TAS برابر با نصف دایره است. یعنی: $\left|\widehat{TAS}\right|=\frac{۲\pi R}{۲}=\pi R$

به‌همین ترتیب $\left|\widehat{T'A'S'}\right|=\pi R$

TT' هم برابر با طول خط المرکزین دو دایره، یعنی $۲R$ است. پس:

طول نخ $=(\pi R\times ۲)+(۲R\times ۲)=۴R+۲\pi R$

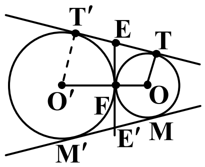
نکته: اگر زاویه‌ی بین مماس مشترک‌های داخلی و یا خارجی α باشد، این مماس‌ها توسط فرمول‌های زیر قابل محاسبه‌اند:

$$AB = A'B' = |R - R'|\cot\frac{\alpha}{۲}$$

$$CD = C'D' = (R + R')\cot\frac{\alpha}{۲}$$

مثال: دو دایره به شعاع‌های ۹ و ٤ مماس بیرون هستند. اگر TT'، EE' و MM' مماس مشترک‌های این دوایر باشند، طول EE' چقدر است؟

حل:

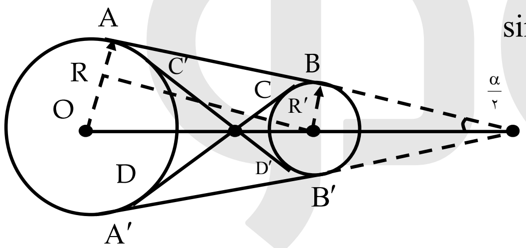


$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{EF = T'E = ET \to EF = \frac{TT'}{۲}} \\ &\mathbf{FE' = M'E' = E'M \to E'F = \frac{MM'}{۲}} \end{aligned}\right\} \to \mathbf{EF = E'F = \frac{TT'}{۲}}$$

$$\mathbf{TT' = MM' \to EE' = TT'}$$

پس:

$$\mathbf{EE' = TT' = \sqrt{(R+R')^۲ - (R-R')^۲} = \sqrt{۴RR'} = ۲\sqrt{RR'} = ۲\sqrt{۴\times۹} = ۱۲}$$



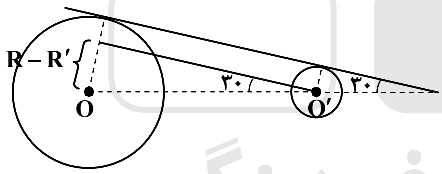
نکته: اگر α زاویه‌ی بین دو مماس مشترک خارجی باشد، آن‌گاه: $\sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{R - R'}{d}$

و در دو دایره مماس خارج: $\sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{R - R'}{R + R'}$

و اگر α زاویه‌ی بین دو مماس مشترک داخلی باشد: $\sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{R + R'}{d}$

مثال: زاویه‌ی بین خط‌المرکزین و مماس خارج دو دایره به شعاع‌های ۷/۵ و ۳۰ سانتی‌متر، ۳۰ درجه است. طول خط‌المرکزین دو دایره چند سانتی‌متر است؟

حل:



$$\mathbf{Sin\,۳۰^\circ = \frac{|R - R'|}{OO'} = \frac{۳۰ - ۷/۵}{OO'} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow OO' = ۴۵}$$

مثال: دو دایره به شعاع‌های $۲R, R$ مماس خارج‌اند. زاویه‌ی بین خط‌المرکزین و مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر کدام است؟

حل:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{d = ۳R} \\ &\mathbf{۲R - R = R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{Sin\alpha = \frac{R}{۳R} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \alpha = Sin^{-۱}\frac{۱}{۳}}$$

مثال: اندازه زاویه‌ی بین دو مماس مشترک داخلی دوایر $C(O, ۲\sqrt{۲}), C'(O', \sqrt{۲}), OO' = ٦$ کدام است؟

حل:

$$\mathbf{\frac{\alpha}{۲} = Sin^{-۱}\frac{R + R'}{d} \Rightarrow \alpha = ۲Sin^{-۱}\frac{R + R'}{d} = ۲Sin^{-۱}\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۹۰^\circ}$$