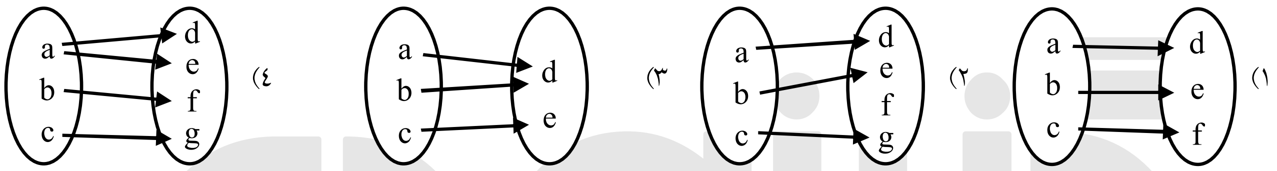
فصل سوم

تبدیلات هندسی

نگاشت:

در ریاضی برای تعریف انواع معینی از تناظرهای بین مجموعه‌ها کلمه‌ی نگاشت به‌کار می‌رود. نگاشت از D به R، تناظری بین مجموعه‌های D و R است که در آن هر عضو مجموعه D با یک و تنها یک عضو از مجموعه R متناظر باشد. به عبارت دیگر نگاشت از D به R قاعده‌ای است که به هر عنصر D عنصر مشخص و یکتایی از R را نسبت دهد. طبق این تعریف هر عضو R ممکن است با بیش از یک عضو D متناظر باشد.

مثال: کدام‌یک، یک نگاشت نیست؟



حل: گزینه ٤ صحیح است.

نگاشت‌ها را معمولاً با حروف بزرگ نشان می‌دهند. نماد $M : D \to R$ نگاشتی از مجموعه D به مجموعه R را نمایش می‌دهد. اگر A عضوی از مجموعه D و A' عضو نظیر آن در مجموعه R باشد، می‌نویسیم: $M(A) = A'$. A'، تصویر A تحت نگاشت M خوانده می‌شود.

هر نقطه صفحه را به‌صورت زوج مرتب (x, y) نشان می‌دهیم. اگر T یک نگاشت باشد، آن‌گاه $T(x, y) = (x', y')$ به این معنا است که نقطه‌ی (x', y') تصویر نقطه‌ی (x, y) تحت نگاشت T است.

مثال: اگر $T(x, y) = (x + ٥, ٤y)$ آن‌گاه تحت نگاشت T، $(٤, ١٢)$ تصویر کدام نقطه است؟

حل:

$$T(x, y) = (x + 5, 4y) = (4, 12) \Rightarrow \begin{cases} x + 5 = 4 \Rightarrow x = -1 \\ 4y = 12 \Rightarrow y = 3 \end{cases} \qquad T(-1, 3) = (4, 12)$$

نگاشت یک به یک:

نگاشت خطی $f : IR^2 \to IR^2$ یک به یک است هرگاه f بردارهای (نقاط) متمایز IR^2 را به بردارهای (نقاط) متمایز IR^2 نظیر کند، یعنی به ازای v_1 , v_2 از IR^2 اگر $v_1 \neq v_2$ آنگاه: $f(v_1) \neq f(v_2)$ باشد، یا به عبارت دیگر اگر $f(v_1) = f(v_2)$ آن‌گاه $v_1 = v_2$.

یعنی در نگاشت یک به یک $M : D \to R$ هر عضو R حداکثر می‌تواند تصویر یک عضو D باشد.

تبدیلات هندسی:

نگاشت‌های خاصی که آن‌ها را تبدیل می‌نامیم، حرکت‌هایی را در هندسه توصیف می‌کنند.

تبدیل، نگاشتی یک‌به‌یک از صفحه به روی خودش است. $(M : IR^2 \to IR^2)$

در تبدیل، هر نقطه در صفحه، تصویر یک نقطه از صفحه است و هیچ دو نقطه‌ای دارای یک تصویر نیستند.

شرط ریاضی تبدیل بودن نگاشت $M : IR^2 \to IR^2$ را می‌توان به این صورت بیان کرد:

اگر $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \Rightarrow T(x_1, y_1) \neq T(x_2, y_2)$ یا اگر $T(x_1, y_1) = T(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

مثال: کدام نگاشت یک تبدیل است؟

۱) $T(x,y)=(x,0)$ ۲) $T(x,y)=(x-y,x-y)$

۳) $T(x,y)=(2x-1,y)$ ۴) $T(x,y)=(x,x)$

حل: گزینه ۳ صحیح است.

با یافتن مثال نقض می‌توان ثابت کرد که گزینه های «الف»، «ب» و «د» یک به یک نیستند. اما گزینه‌ی «ب» یک به یک است زیرا:

$$T(x_1,y_1)=T(x_2,y_2) \Rightarrow (2x_1-1,y_1)=(2x_2-1,y_2) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1-1=2x_2-1 \Rightarrow x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1,y_1)=(x_1,y_2)$$

بقیه گزینه‌ها یک به یک نیستند:

$$T(x,y_1)=T(x,y_2)=(x,0)$$
$$T(x_1,x_1)=T(y_1,y_1)=(0,0)$$
$$T(x,y_1)=T(x,y_2)=(x,x)$$

تبدیل ایزومتری:

تبدیلی که فاصله‌ی بین نقطه‌ها را حفظ کند ایزومتری نامیده می‌شود.

مثال: اگر تبدیل $T(x,y)=(ax+by,bx-ay)$ ایزومتری باشد، کدام رابطه درست است؟

۱) $a-b=1$ ۲) $a^2+b^2=1$ ۳) $a^2-b^2=1$ ۴) $a+b=1$

حل: گزینه ۲ صحیح است.

این تبدیل مبدأ را به مبدأ می‌نگارد، یعنی $T(0,0)=(0,0)$، لذا کافی است فاصله یک نقطه دلخواه صفحه را از مبدأ، با فاصله تصویرش از مبدأ برابر قرار دهیم.

$$\vec{A}(x,y) \Rightarrow |\overrightarrow{OA}|=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\vec{A}(ax+by,bx-ay) \Rightarrow |\overrightarrow{OA}|=\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} \Rightarrow a^2+b^2=1$$

مثال: کدام‌یک از تبدیل‌های زیر، ایزومتری است؟

۱) $D(x,y)=(-x,y+2)$ ۲) $D(x,y)=(-y,2x)$ ۳) $D(x,y)=(x+1,2y)$ ۴) $D(x,y)=(x,0)$

حل: گزینه ۱ پاسخ است.

گزینه‌ی ۱ ترکیب بازتاب و انتقال است که هر دو ایزومتری‌اند. اما گزینه‌های ۲ و ۳ در راستای y کشیدگی ایجاد می‌کنند (چیزی شبیه تجانس منتهی روی یک محور) و گزینه‌ی ٤ نیز تصویر است که ایزومتری نیست.

نمایش ماتریسی تبدیلات هندسی:

یکی از مهم‌ترین ویژگیهای تبدیلات هندسی خطی، آن است که می توان آن‌ها را با ماتریس نیز معرفی کرد.ماتریس نظیر تبدیل $T(x,y)=(ax+by,cx+dy)$ عبارت است از: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، همچنین اگر تبدیل $T:IR^2 \to IR^2$ با ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بیان شود، تبدیل‌یافته‌ی هر نقطه به مختصات (x,y) از صفحه‌ی IR^2 توسط T نقطه‌ای مانند (x',y') است که:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$$

مثال: اگر تبدیل یافته نقطه‌ی $(1,-1)$ تحت ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & b \\ a & -1 \end{bmatrix}$ نقطه‌ی $(2,3)$ باشد، $a+b$ کدام است؟

حل:

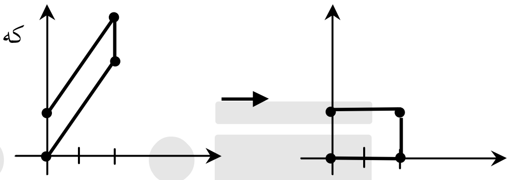
$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ a & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix} 1-b=2\Rightarrow b=-1 \\ a+1=3\Rightarrow a=2 \end{matrix}\Rightarrow a+b=1$$

مثال: تبدیل‌یافته‌ی متوازی‌الاضلاع که رئوس آن $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ است، تحت ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ کدام چهارضلعی می‌باشد؟

حل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

که مختصات رئوس یک مستطیل است.



تبدیل‌های متوالی:

تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ را ممکن است به صورت ترکیب تبدیل‌های خطی $T_1,\dots,T_n$ بیان کنیم. یعنی $T(x)=T_n(T_{n-1}(\dots T_2(T_1(x))\dots))$. اگر تبدیل‌های $T_1,\dots,T_n$ دارای ماتریس‌های $A_1,\dots,A_n$ باشد، ماتریس تبدیل T حاصل‌ضرب آن ماتریس‌ها خواهد بود: $A=A_nA_{n-1}\dots A_2A_1$

تبدیل وارون:

اگر تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ وجود داشته باشد، آن گاه نگاشت $T^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ نیز یک تبدیل خطی است، که آن را وارون نگاشت T می‌نامیم. در این صورت داریم: $T^{-1}OT(x,y)=I$, $TOT^{-1}(x,y)=I$ که I تبدیل همانی است، یعنی:
$I(x,y)=(x,y)$

اگر تبدیل T دارای ماتریس A باشد، تبدیل T^{-1} دارای ماتریس A^{-1} می‌باشد.

مثال: وارون تبدیل $T(x,y)=(5x+2y,7x+3y)$ کدام است؟

حل:

راه حل اول:

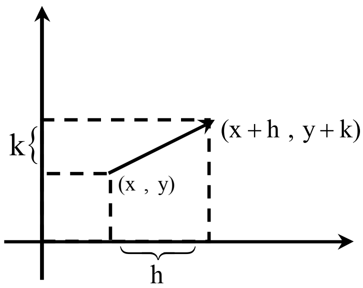
$$T(x,y)=(X,Y)\Rightarrow T^{-1}(X,Y)=(x,y)\Rightarrow\begin{cases} X=5x+2y \\ Y=7x+3y \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=3X-2Y \\ y=-7X+5Y \end{cases}\Rightarrow T^{-1}(X,Y)=(3X-2Y,-7X+5Y)$$

راه حل دوم:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}\Rightarrow T^{-1}(x,y)=(3x-2y,-7x+5y)$$

تبدیلات هندسی مهم:

الف) انتقال:



انتقال تبدیلی است که تحت آن همه‌ی نقطه‌های صفحه، به یک فاصله و در یک جهت جابه‌جا می‌شوند. تبدیل $T_{(h,k)}(x,y)=(x+h,y+k)$ به‌ازای هر دو عدد حقیقی ثابت k,h نشان‌دهنده‌ی یک انتقال است.

در انتقال همه‌ی نقاط صفحه به اندازه‌ی یک بردار ثابت و در جهت آن بردار منتقل می‌شوند. (لذا تبدیل انتقال فقط دارای یک بردار ثابت است.)

ویژگی‌های انتقال:

۱) بردارهایی که هر نقطه را به نقطه‌ی تصویرش نظیر می‌سازند، دارای طول‌های مساوی و جهت‌های یکسان هستند.

۲) انتقال طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.

۳) انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.

۴) انتقال یک ایزومتری است.

۵) نتیجه هر چند انتقال متوالی خود یک انتقال است.

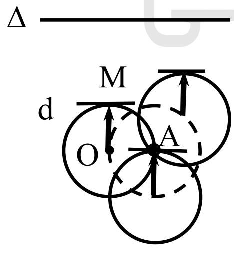
مثال: اگر خط D' تصویر خط D در اثر انتقال با بردار $\vec{v}=(۲,۰)$ و Δ' تصویر خط Δ در اثر انتقال با بردار $\vec{v}=(۰,۳)$ باشد، از تقاطع این چهار خط کدام شکل ساخته می‌شود؟ (Δ و D متقاطع‌اند.)

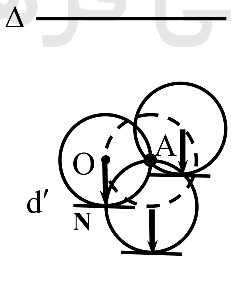
۱) الزاماً مستطیل ۲) الزاماً مربع ۳) الزاماً لوزی ۴) متوازی‌الاضلاع

حل: گزینه ۴ صحیح است.

شکل حاصل بستگی به وضعیت خط‌های $\mathbf{\Delta,D}$ نسبت به هم دارد و بنابراین در حالت کلی با توجه به این‌که $\mathbf{D\parallel D'}$ و $\mathbf{\Delta\parallel\Delta'}$ است، چهارضلعی حاصل متوازی‌الاضلاع است.

مثال: دایره‌ی $C(O,R)$ حول یک نقطه خود به نام A که نقطه ثابتی است حرکت می‌کند. مکان هندسی نقطه‌ی تماس این دایره با مماس‌های موازی با امتداد ثابت Δ کدام است؟





۱) دایره است به مرکز A و به شعاع R.

۲) دو دایره به شعاع R است که از A می‌گذرند.

۳) دایره است به مرکز O و به شعاع $۲R$.

۴) خطی است موازی با امتداد ثابت Δ.

حل: گزینه ۲ صحیح است.

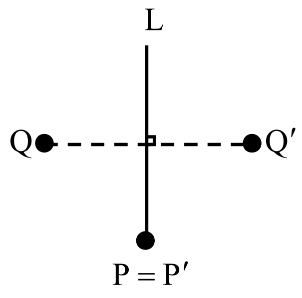
اولاً چون دایره حول **A** حرکت می‌کند، مکان هندسی **O** یک دایره به مرکز **A** و به شعاع **R** است. اگر **d** موازی با **Δ** و مماس بر دایره **C** باشد، **OM** برداری است عمود بر **Δ** به اندازه **R**، پس **M** انتقال یافته **O** است، به اندازه بردار **OM**.

بنابراین مکان هندسی **M** انتقال یافته مکان هندسی **O** است. همچنین مکان هندسی **N** انتقال یافته مکان **O** با بردار **ON** است. در نتیجه مکان مزبور دو دایره به شعاع **R** است که از **A** می‌گذرند.

ب) بازتاب (تقارن):

۱) بازتاب نسبت به خط:

به ازای هر خط L در صفحه، بازتاب نسبت به خط L، تبدیلی است که تحت آن تصویر هر نقطه Q که روی خط L نباشد، نقطه‌ای مانند Q' است، بطوریکه خط L عمود منصف QQ' باشد. همچنین تصویر نقطه P که روی خط L می‌باشد، خود آن نقطه می‌باشد. خط L محور تقارن بازتاب نامیده می‌شود. بازتاب نسبت به خط L را با $A_L(x,y)$ نمایش می‌دهیم.



برای مثال:

$A_{y=0}(x,y)=(x,-y)$ بازتاب نسبت به محور xها

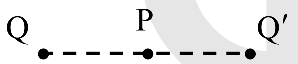
$A_{x=0}(x,y)=(-x,y)$ بازتاب نسبت به محور yها

$A_{y=x}(x,y)=(y,x)$ بازتاب نسبت به نیمساز ربع اول و سوم

$A_{y=-x}(x,y)=(-y,-x)$ بازتاب نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم

۲) بازتاب نسبت به نقطه:

به ازای هر نقطه P در صفحه بازتاب نسبت به نقطه P، نگاشتی است که تحت آن هر نقطه‌ی Q در صفحه روی نقطه‌ای مانند Q' طوری نگاشته می‌شود که Q، P و Q' روی یک خط راست باشند و $PQ=PQ'$، نقطه‌ی P مرکز تقارن این بازتاب نامیده می‌شود.
برای مثال ضابطه بازتاب نسبت به مبدأ به‌صورت روبه‌رو می باشد:



$$A_O(x,y)=(-x,-y)$$

ویژگیهای کلی بازتاب:

۱- بازتاب طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.

۲- بازتاب در حالت کلی شیب خط را حفظ نمی‌کند. (بازتاب نسبت به نقطه شیب را حفظ می‌کند و بازتاب نسبت به خط شیب را لزوماً حفظ نمی‌کند)

۳- بازتاب جهت شکل را حفظ نمی‌کند.

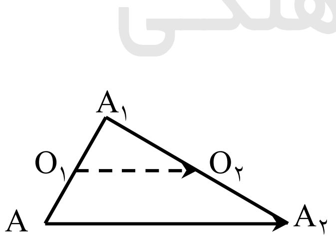
۴- بازتاب یک ایزومتری است.

ویژگی‌های خاص بازتاب نسبت به نقطه:

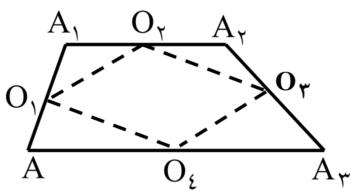
۱) همه ویژگی‌های دوران را دارد.

۲) نتیجه‌ی هر دو بازتاب نسبت به دو نقطه‌ی O_1 و O_2 یک انتقال است با بردار $2\overrightarrow{O_1O_2}$.

$$\overrightarrow{AA_2}=2\overrightarrow{O_1O_2}$$



۳) نتیجه هر سه بازتاب متوالی نسبت به سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست O_1,O_2,O_3، بازتاب نسبت به نقطه O_4 است.
نقطه O_4 رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی است که سه رأس متوالی آن O_1,O_2,O_3 می‌باشد.



۴) ضابطه‌ی تقارن نسبت به نقطه $O(\alpha,\beta)$ برابر است با: $A_O(x,y)=(2\alpha-x,2\beta-y)$

مثال: معادله‌ی تصویر خط گذرنده بر دو نقطه‌ی $A(۸,۱)$ و $B(-۲,۵)$ تحت بازتاب نسبت به نقطه‌ی $(-۱,۳)$ کدام است؟

۱) $۵y+۲x=۵$ ۲) $۵y+۲x=۹$ ۳) $۵y-۲x=۱۰$ ٤) $۲y+۵x=۷$

حل: گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left.\begin{matrix} A\begin{vmatrix} ۸ \\ ۱ \end{vmatrix} \Rightarrow O\begin{vmatrix} -۱ \\ ۳ \end{vmatrix} \Rightarrow A''\begin{vmatrix} -۱۰ \\ ۵ \end{vmatrix} \\ B\begin{vmatrix} -۲ \\ ۵ \end{vmatrix} \Rightarrow O\begin{vmatrix} -۱ \\ ۳ \end{vmatrix} \Rightarrow B''\begin{vmatrix} ۰ \\ ۱ \end{vmatrix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow y-۱=\frac{۵-۱}{-۱۰}(x-۰)$$

$$۵y-۵=۲x \Rightarrow ۲x+۵y=۵$$

۵) اگر خط $\Delta':ax+by+c'=۰$ تصویر خط $\Delta:ax+by+c=۰$ تحت بازتاب نسبت به نقطه O باشد، معادله مکان هندسی مرکز تقارن (نقطه O) برابر است با: $ax+by+\frac{c+c'}{۲}=۰$. این خط، موازی دو خط Δ و Δ' و در وسط آن‌ها واقع است.

مثال: اگر تصویر خط $D:۲x-y+۲=۰$ در اثر تقارن نسبت به نقطه ω خط $D':-۲x+y+۲=۰$ باشد، مکان هندسی ω کدام است؟

حل:

$$\begin{matrix} ۲x-y+۲=۰ \\ ۲x-y-۲=۰ \end{matrix} \Rightarrow ۲x-y+\frac{۲-۲}{۲}=۰ \Rightarrow y=۲x$$

مثال: بازتاب خط $x-۲y=۴$ نسبت به نقطه‌ی $(۲,a)$، خط $x-۲y+۶=۰$ است. a کدام است؟

حل:

چون دو خط موازیند، محور تقارن خطی است که بین دو خط و با فاصله‌ی مساوی از آن دو قرار دارد.

$$\left.\begin{matrix} x-۲y-۴=۰ \\ x-۲y+۶=۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow x-۲y+\frac{۶-۴}{۲}=۰ \to x-۲y+۱=۰$$

پس نقطه ی $\begin{vmatrix} ۲ \\ a \end{vmatrix}$ روی خط فوق قرار دارد.

$$۲-۲a+۱=۰$$

پس $a=\frac{۳}{۲}$

ویژگی‌های خاص بازتاب نسبت به خط:

۱) نتیجه هر دو بازتاب نسبت به دو خط موازی یک انتقال است. بردار این انتقال عمود بر راستای دو خط و اندازه‌ی آن، دو برابر فاصله بین دو خط است.

$$(A\,A_۲=۲\vec{L})$$

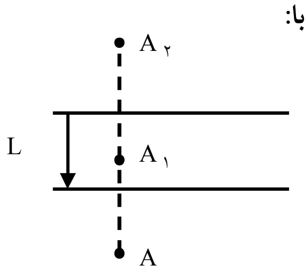
مثال: نتیجه دو بازتاب متوالی نقطه‌ی $(۳,۳)$ نسبت به خط $y=۲$ و سپس خط $y=٤$ برابر است با:

۱) بازتاب نسبت به نقطه $(۳,٤)$

۲) انتقال تحت بردار $(۰,٤)$

۳) بازتاب نسبت به خط $y=٤$

٤) چنین تبدیلی وجود ندارد.

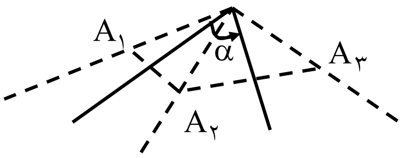


حل: گزینه ۲ صحیح است.

$\overrightarrow{AA_2} = 2\vec{L}$

$\vec{L} = (0,2) \Rightarrow \overrightarrow{AA_2} = 2(0,2) = (0,4)$

انتقال تحت بردار $\overrightarrow{AA_2} = (0,4)$



نتیجه: هر دو بازتاب نسبت به دو خط متقاطع، دورانی است به مرکز محل تلاقی دو خط متقاطع (محور تقارن) و زاویه‌ای مساوی دو برابر زاویه بین دو خط.

۲) ضابطه‌ی بازتاب نسبت به خط $\Delta : ax + by + c = 0$ عبارت است از:

$$A_\Delta(x,y) = \left(x - 2a \times \frac{ax+by+c}{a^2+b^2},\ y - 2b \times \frac{ax+by+c}{a^2+b^2}\right)$$

مثال: اگر نقطه‌ی M' تصویر نقطه‌ی $M = (-1,-1)$ در اثر بازتاب نسبت به خط $2x + y - 2 = 0$ باشد، مختصات M' کدام است؟

حل:

$$M' = A(-1,-1) = (-1 - (2 \times 2 \times \frac{-2-1-2}{5}), -1 - (2 \times 1 \times \frac{-2-1-2}{5})) \Rightarrow M' = (3,1)$$

مثال: تحت یک بازتاب نسبت به خط، نقطه‌ی $(-2,1)$ روی نقطه‌ی $(2,5)$ تصویر می‌شود، تصویر کدام نقطه تحت این بازتاب نقطه‌ی $(3,4)$ است؟

۱) $(0,1)$ ۲) $(0,-1)$ ۳) $(1,0)$ ٤) $(-1,0)$

حل: گزینه ٤ صحیح است.

چون بازتاب تبدیلی ایزومتری است، پس فاصله‌ی نقطه‌ی $(2,5)$ از نقطه‌ی $(3,4)$ با فاصله‌ی نقطه‌ی $(-2,1)$ از نقطه ای که تصویرش $(3,4)$ است باید برابر باشد که این موضوع فقط در گزینه‌ی ٤ اتفاق می‌افتد.

مثال: معادله‌ی تبدیل یافته دایره‌ی $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$ تحت نگاشت تقارن نسبت به خط $y = x$ چیست؟

حل:

چون قرینه دایره نسبت به خط $y = x$ دایره‌ای به همان شعاع است، کافی است قرینه‌ی مرکز دایره را به‌دست آوریم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$$

۳) اگر خط $\Delta' : a'x + b'y + c' = 0$ تصویر خط $\Delta : ax + by + c = 0$ تحت بازتاب باشد، معادلات محورهای تقارن در صفحه، برابر $\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm \frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$ است. (معادله‌ی نیمسازهای دو خط متقاطع)

مثال: اگر دو خط $x - 2y + 1 = 0$ و $4x + 2y - 1 = 0$ قرینه محوری یکدیگر باشند، محور تقارن کدام است؟

حل:

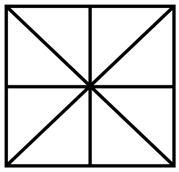
$$\frac{4x+2y-1}{\sqrt{4+16}} = \pm \frac{x-2y+1}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow 4x+2y-1 = \pm 2(x-2y+1) \Rightarrow 2x+6y-3 = 0 \quad \text{و} \quad 6x-2y+1=0$$

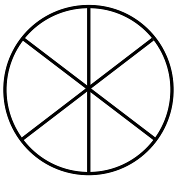
مرکز تقارن و محور تقارن یک شکل:

اگر برای یک شکل نقطه‌ای مانند O وجود داشته باشد، به گونه‌ای که قرینه‌ی هر نقطه شکل نسبت به O نقطه‌ای از خود شکل باشد، O را مرکز تقارن آن شکل نامند. مثلاً مرکز دایره، مرکز تقارن دایره است. اگر برای یک شکل، خطی مانند Δ وجود داشته باشد، به گونه‌ای که قرینه‌ی هر نقطه‌ی آن شکل نسبت به آن خط، نقطه‌ای از خود شکل باشد، Δ را محور تقارن آن شکل می‌نامند. بعضی از شکل‌ها محور تقارن ندارند و برخی دیگر دارای یک یا چند محور تقارن هستند. مثلاً متوازی‌الاضلاع محور تقارن ندارد و دایره بی‌شمار محور تقارن دارد.

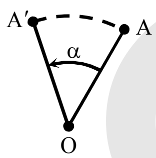
قضیه: شکلی که دارای دو محور تقارن عمود بر هم باشد دارای مرکز تقارن است.

نکته: n ضلعی منتظم دارای n محور تقارن است. اگر n فرد باشد مرکز تقارن ندارد و اگر n زوج باشد دارای یک مرکز تقارن است.





۵) دوران:



یک دوران به مرکز O و زاویه α تبدیلی است که هر نقطه‌ی A در صفحه را به نقطه‌ای مانند A' از آن صفحه نظیر می‌کند به گونه‌ای که:

۱) مرکز دوران یعنی نقطه‌ی O ثابت است.

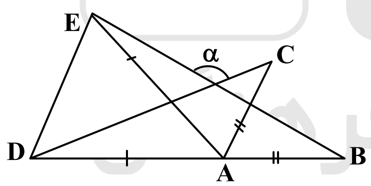
۲) اگر A نقطه‌ای غیر از O باشد، آن‌گاه $OA = OA'$ و $A\hat{O}A' = \alpha$ (α زاویه دوران)

در دایره‌ای به مرکز O نقطه‌ای مانند A را در نظر گرفته و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت روی دایره از A به A' حرکت می‌کنیم به‌طوری‌که $A\hat{O}A' = \alpha$. چون $OA = OA'$، پس A' تصویر نقطه‌ی A تحت دوران به مرکز O و اندازه‌ی α است.

اگر α یعنی اندازه زاویه مثبت باشد، دوران در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است.

$A\hat{O}C = ۱۲۰°$

☜**مثال: در شکل مقابل $AB = AC, AD = AE, C\hat{A}B = ۵۰°$ و $A\hat{E}D = ۶۵°$ زاویه α چند درجه است؟**



۱) ۱۱۵

۲) ۱۲۰

۳) ۱۲۵

۴) ۱۳۰

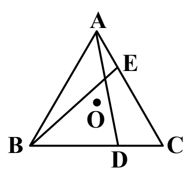
✍**حل:** گزینه ۴ پاسخ است.

مثلث ADC دوران‌یافته‌ی مثلث AEB به‌اندازه‌ی $۵۰°$ حول A است. لذا: $BE \to CD$

پس زاویه‌ی بین BE و CD نیز زاویه‌ی دوران است که چون α منفرجه است، ما زاویه‌ی مکمل آن را به‌دست می‌آوریم:

$۱۸۰° - ۵۰° = ۱۳۰°$

☜**مثال: نقطه‌ی O مرکز ثقل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است و $BD = CE$. کدام بیان نادرست است؟**



۱) $OE = OD$

۲) $OD \perp BE$

۳) $E\hat{O}D = ۱۲۰°$

۴) $A\hat{O}C = ۱۲۰°$

حل: گزینه ۲ پاسخ است.

چون $\begin{cases} AB = BC \\ BD = CE \\ \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ \end{cases}$، پس می‌توان گفت مثلث BEC دوران‌یافته‌ی مثلث ABD نسبت به نقطه‌ی O است.

$A \to B$
$D \to E$
$B \to C$

و زاویه‌ی دوران $A\hat{O}B = 120^\circ$ است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی ۱ : $OE = OD$: (چون در ضمن دوران، شعاع دوران ثابت است.)

گزینه‌ی ۲ : $E\hat{O}D = 120^\circ$

با همین توضیحات می‌توان ABE را دوران‌یافته‌ی ADC به‌اندازه‌ی ۱۲۰ درجه حول نقطه‌ی O دانست. لذا:

ویژگی‌های دوران:

۱) دوران طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.

۲) دوران مرکز دوران را ثابت نگه می‌دارد.

۳) دوران الزاماً شیب خط را حفظ نمی‌کند (جز برای $\theta = 180^\circ$ و $\theta = 360^\circ$ و مضارب آن‌ها یعنی $\theta = k\pi$).

۴) دوران یک ایزومتری است.

۵) نتیجه هر چند دوران حول یک مرکز، یک دوران است به همان مرکز و زاویه‌ای مساوی مجموع زاویه‌ها.

۶) تبدیل‌یافته‌ی نقطه‌ی (x, y)، تحت دوران به اندازه زاویه‌ی θ برابر است با: $(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ و لذا: تبدیل دوران را با ماتریس مقابل می‌توان بیان کرد: $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

که مثلاً برای $\theta = 90^\circ$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow R(x, y) = (-y, x)$$

و برای $\theta = 180^\circ$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \Rightarrow R(x, y) = (-x, -y)$$

و برای $\theta = 270^\circ$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \Rightarrow R(x, y) = R(y, -x)$$

۷) دوران به مرکز O و زاویه 180° معادل بازتاب نسبت به نقطه O نیز می‌باشد. در این حالت نقطه O مرکز تقارن نیز نامیده می‌شود.

مثال: به ازای کدام مقدار a، نقطه $M' = (a+1, a-1)$ تصویر نقطه $M = (1,1)$ در اثر دوران با مرکز مبداء مختصات و زاویه 45° است؟

حل:

$$\begin{bmatrix} a+1 \\ a-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+1 = 0 \\ a-1 = \sqrt{2} \end{cases}$$

برای **a** جواب وجود ندارد.

مثال: تبدیل $T(x,y)=(-y+1,x-1)$ نتیجه کدام دو تبدیل است؟

۱) انتقال و دوران ۲) انتقال و تجانس ۳) دو تقارن محوری ٤) انتقال و تقارن

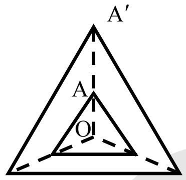
حل: گزینه ۱ صحیح است.

$$\mathbf{T(x,y)=(-(y-1),(x-1))}$$
$$\mathbf{T_{(-1,-1)}(x,y)=(x-1,y-1)}$$
$$\mathbf{R_{90}\circ T_{(-1,-1)}(x,y)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-1\\ y-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(y-1)\\ x-1\end{bmatrix}}$$

لذا ترکیب یک انتقال و یک دوران است.

د) تجانس:

تجانس به مرکز O و نسبت K تبدیلی است که هر نقطه A در صفحه را به نقطه‌ای مانند A' از آن صفحه طوری نظیر کند که:



۱) مرکز تجانس یعنی نقطه‌ی O ثابت باشد.

۲) A' روی نیم‌خط OA قرار گیرد به‌طوری‌که: $OA'=K.OA$

تحت تجانس همه‌ی ابعاد یک شکل به نسبت تجانس بزرگ یا کوچک می‌شود. (مگر در حالت $k=1$)

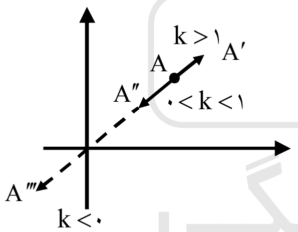
مثال: اگر در تجانس به مرکز $\omega=(-2,3)$ تصویر خط $x-5y+1=0$ خط $x-5y-3=0$ باشد، قدرمطلق نسبت تجانس کدام است؟

حل:

چون ω مرکز تجانس است، پس باید فاصله‌ی ω از D'، $|k|$ برابر فاصله‌ی ω از D باشد.

$$\mathbf{\omega H'=|k|\omega H\Rightarrow \frac{|-2-15-3|}{\sqrt{1+25}}=|k|\times\frac{|-2-15+1|}{\sqrt{1+25}}\Rightarrow 20=|k|\times 16\Rightarrow |k|=\frac{5}{4}}$$

ضابطه‌ی تبدیل تجانس:



تبدیل $D(x,y)=(kx,ky)$ در صفحه مختصات یک تجانس با نسبت تجانس k و مرکز تجانس $(0,0)$ را نشان می‌دهد.

اگر $k>1$ باشد، تجانس یک انبساط و اگر $1>k>0$ باشد، تجانس یک انقباض نام دارد.

حالت $k<0$ تجانس معکوس نامیده می‌شود.

ویژگی‌های تجانس:

۱) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

۲) تحت تجانس مرکز تجانس ثابت می‌ماند.

۳) تجانس طول یا مساحت را حفظ نمی‌کند (مگر در حالتی که $k=1$).

٤) تجانس طول را با ضریب k و مساحت را با ضریب k^2 تغییر می‌دهد.

۵) خطهایی که نقطه‌های نظیر را به هم وصل می‌کنند در مرکز تجانس همرسند.

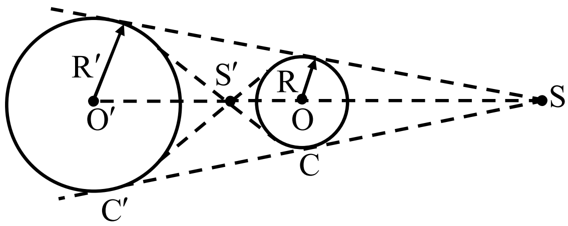
٦) نتیجه دو تجانس هم مرکز با نسبت‌های k و k' تجانسی است با همان مرکز و نسبت kk'.

۷) ماتریس تبدیل تجانس با نسبت تجانس k و مرکز $(0,0)$ برابر است با: $\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$

۸) مجانس نقطه‌ی A به مرکز S و نسبت K نقطه A' است که $A'=kA+(1-k)S$.

$$\mathbf{SA'=KSA\to(A'-S)=K(A-S)\Rightarrow A'=KA+(1-K)S}$$

۹) هـر دو دایره مجانس یکدیگرنـد (هم مستقیم و هم معکوس). مرکز تجانس نقطه‌ای است واقع بر خط‌المرکزین (یا امتداد آن) که خط المرکزین را به نسبت دو شعاع تقسیم می‌کند.



اگر C' تصویر C باشد:

$k=\frac{R'}{R}$ و مرکز تجانس مستقیم: S (C' تصویر C)

$k=-\frac{R'}{R}$ و مرکز تجانس معکوس: S' (C' تصویر C)

☜**مثال: معادله‌ی تصویر خط $y+2x=3$ تحت تجانس به مرکز $(1,4)$ و نسبت ۲، به‌صورت $y+ax=b$ است. b کدام است؟**

۱) ۵ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۱-

✍**حل:** گزینه ۲ پاسخ است.

$$\overrightarrow{SA'}=K\overrightarrow{SA}\Rightarrow A'-S=K(A-S)\Rightarrow A'=KA+(1-K)S$$

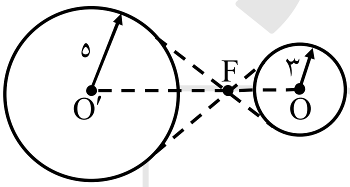
$$\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}1\\4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x-1\\2y-4\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}x=\dfrac{x'+1}{2}\\y=\dfrac{y'+4}{2}\end{vmatrix}$$

$$y+2x=3\Rightarrow\frac{y'+4}{2}+2\left(\frac{x'+1}{2}\right)=3\Rightarrow y'+4+2(x'+1)=6\Rightarrow y'+2x'=0\Rightarrow a=2\,,\,b=0$$

تذکر: اگر دو دایره متساوی باشند، فقط مجانس معکوس یکدیگرند و در این حالت $k=-1$ است.

☜**مثال: O,O' مرکزهای دو دایره به شعاعهای ۵٫۳ سانتی‌متر است. اگر $OO'=12\text{cm}$ باشد، فاصله مرکز تجانس معکوس این دو دایره از مرکز دایره با شعاع بزرگتر چند سانتی‌متر است؟**

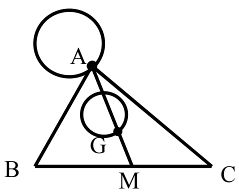
✍**حل:**



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{FO'}{FO}=\dfrac{5}{3}\Rightarrow FO=\dfrac{3}{5}FO'\\ FO+FO'=OO'=12\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{3}{5}FO'+FO'=12\Rightarrow\frac{8}{5}FO'=12\Rightarrow FO'=\frac{60}{8}=7/5$$

☜**مثال: در مثلث ABC دو رأس B,C ثابت و رأس A بر روی دایره‌ی مفروض $C(O,R)$ تغییر می‌کند، مکان هندسـی مرکـز ثقـل مثلث کدام است؟**

✍**حل:**



چون مرکز ثقل مثلث محل تلاقی میانه‌های مثلث است، پس همـواره داریـم: $MG=\frac{1}{3}MA$، یعنـی G مجانس A است به مرکز M و نسبت $\frac{1}{3}$ (M ثابت است، چون وسـط B,C اسـت). پـس مکـان هندسی G مجانس مکان هندسی A با نسبت $\frac{1}{3}$ می‌باشد، یعنی دایره‌ای به شعاع $\frac{R}{3}$.

☜**مثال: ترکیب دو تقارن محوری که محورهای آن دو بر هم عمود باشند، کدام تبدیل نمی‌تواند باشد؟**

۱) انتقال ۲) تجانس ۳) تقارن مرکزی ۴) دوران

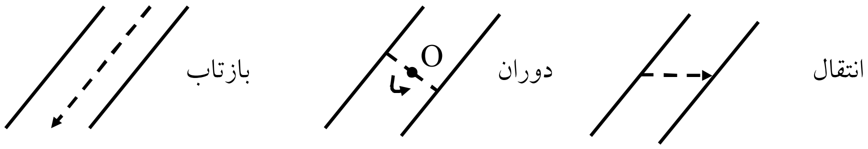
✍**حل:** گزینه ۱ صحیح است.

ترکیب دو تقارن با محورهای متقاطع یک دوران با زاویه‌ای برابر دو برابر زاویه بین دو خط است، لذا دورانـی بـه انـدازه $2\times 90^\circ=180^\circ$ داریم که یک تقارن مرکزی است. تقارن مرکزی نسبت به نقطه تقاطع، تجانس با ضریب $k=-1$ نیز هست.

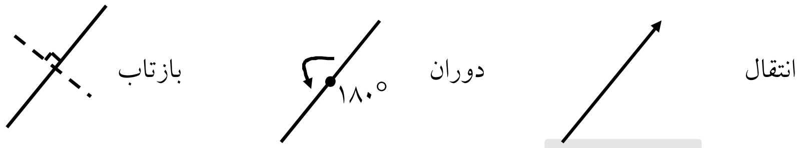
جمع‌بندی و نکات مشترک تبدیلات:

۱) طول پاره‌خط و اندازه‌ی زاویه، تحت انتقال، دوران و بازتاب ثابت می‌ماند.

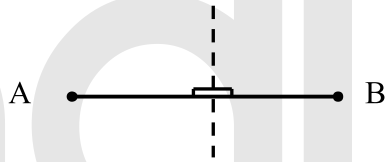
۲) اگر دو خط موازی باشند، هر یک از آن‌ها می‌تواند تحت یک انتقال، دوران 180° یا بازتاب بر روی دیگری نگاشته شود.



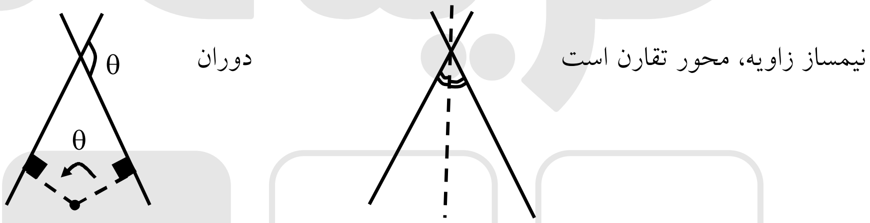
۳) یک خط می‌تواند تحت یک انتقال، دوران 180° یا بازتاب بر روی خودش نگاشته شود.



۴) عمودمنصف هر پاره‌خط AB محور تقارن بازتابی است که $A \to B$ و $B \to A$.



۵) اگر دو خط متقاطع باشند، هر یک از آن‌ها می‌تواند تحت یک دوران یا بازتاب بر روی دیگری نگاشته شود.



مثال: به‌ازای کدام مقدار a، بازتاب خط به معادله‌ی $y = ax + 2a - 1$ نسبت به خط به معادله‌ی $2y - x = 0$ بر خودش نگاشته می‌شود؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

حل: گزینه ٤ پاسخ است.

اگر بازتاب یک خط نسبت به خط دیگری بر خودش نگاشته شود، دو حالت امکان‌پذیر است:

۱) خط اول بر خط دوم عمود باشد.

۲) خط اول بر خط دوم منطبق باشد.

$$y = ax + (2a - 1)$$
$$y = \frac{x}{2}$$

حالت اول:

$$\frac{1}{2} \times a = -1 \Rightarrow a = -2$$

حالت دوم:

$$a = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a - 1 = 0$$

مثال: اگر خط $x-\sqrt{3}y+2=0$ تصویر خط $\sqrt{3}x-y+1=0$ در اثر یک دوران باشد، زاویه‌ی دوران کدام است؟

حل: می‌توان دو خط را دوران یافته یکدیگر حول نقطه تقاطعشان در نظر گرفت. لذا کافی است زاویه‌ی بین دو خط را به عنوان زاویه‌ی دوران به‌دست آوریم:

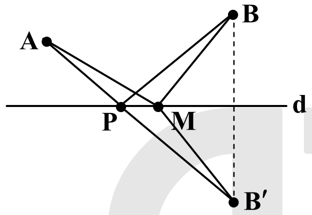
$$\tan\theta=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=\left|\frac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1}\right|=\left|\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\theta=30^\circ$$

اگر دو خط را دوران‌یافته‌ی یکدیگر حول نقطه‌ای بیرون دو خط در نظر بگیریم، در این صورت زاویه‌ی دوران برابر است با: 150°

مثال: در صفحه‌ای خط d و دو نقطه A و B در یک طرف خط مفروض‌اند. برای یافتن نقطه‌ای بر روی خط d که مجموع فاصله‌های آن دو نقطه A و B کم‌ترین مقدار را داشته باشند، کدام تبدیل هندسی به‌کار می‌رود؟

۱) بازتاب ۲) تجانس ۳) دوران ۴) انتقال

حل: گزینه ۱ پاسخ است.



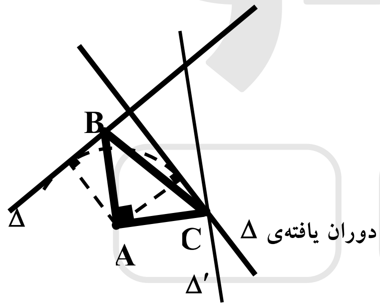
تبدیل موردنیاز بازتاب است چون اگر نقطه‌ی B را نسبت به خط d قرینه کنیم و نقطه‌ای که پاره‌خط AB' خط d را قطع می‌کند را P بنامیم، $|PA|+|PB|$ کم‌ترین مقدار ممکن برای $|MA|+|MB|$ است. چون:

$$\begin{cases}MB=MB'\\PB=PB'\end{cases}$$

طبق قضیه‌ی حمار: $MA+MB'>AB' \Rightarrow MB+MA>AP+PB$

مثال: دو خط Δ و Δ' و نقطه‌ی A خارج آن‌ها مفروض‌اند، برای رسم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین با رأس A که دو سر قاعده‌ی آن بر روی هر دو خط مفروض باشد، کدام تبدیل به‌کار می‌رود؟

حل:



ابتدا خط Δ را به اندازه‌ی 90° حول نقطه‌ی A دوران می‌دهیم تا خط Δ' را در نقطه‌ی C قطع کند.

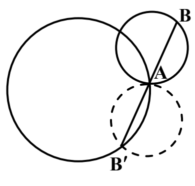
چون تبدیل دوران ایزومتری است، پس فاصله‌ی بین نقاط را حفظ می‌کند. لذا به‌ازای نقطه‌ی C روی خط دوران‌یافته نقطه‌ای مانند B روی Δ وجود دارد که فاصله‌اش از پای عمود با فاصله C از پای عمود برابر است. حال چون C دوران یافته‌ی B است و شعاع دوران در اثنای دوران ثابت می‌ماند، پس مثلث ABC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است پس مثلث مورد نظر رسم شد.

این ایده همواره برای رسم مثلث‌های متساوی‌الساقین با رأس معلوم که دو رأس دیگرشان روی خطوط معلوم قرار داشته باشند، به‌کار می‌رود.

مثال: سه خط d, d', d'' در یک صفحه مفروضند. چند مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد به طوری‌که هر کدام از رئوس آن بر یکی از خط‌های d, d', d'' واقع باشد؟

حل: طبق ایده‌ی مثال فوق، نقطه‌ای روی یکی از خطوط اختیار کرده و مثلث متساوی‌الساقینی با زاویه‌ی رأس ۶۰ درجه که دو رأس دیگر آن روی دو خط دیگر باشد، رسم می کنیم تا مثلث متساوی‌الاضلاع به‌دست آید.

مثال: در یک صفحه، دو دایره با شعاع‌های متفاوت در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. با استفاده از کدام تبدیل می‌توان از نقطه‌ی A خطی گذراند که در این دو دایره، وترهای مساوی ایجاد کند؟



حل: اگر دایره‌ی کوچکتر را نسبت به نقطه‌ی A (نقطه‌ی تقاطع دو دایره‌ی کوچک و بزرگ) بازتاب دهیم، دایره‌ی خط‌چین به‌دست می‌آید. واضح است که $AB=AB'$ زیرا نقطه‌ی B' بازتاب نقطه‌ی B نسبت به مرکز A است.

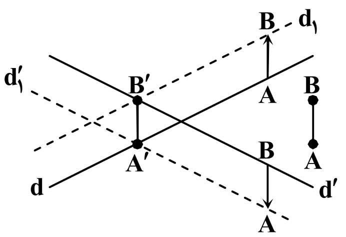
از طرفی AB' وتری از دایره‌ی بزرگ‌تر است، بنابراین از نقطه‌ی A خطی گذرانده شده (خط BB') که در دو دایره‌ی بزرگ و کوچک، وترهای مساوی جدا کرده است (وتر AB در دایره‌ی کوچک = وتر AB' در دایره‌ی بزرگ) پس یعنی بازتاب نسب به نقطه‌ی A ما را به مقصود رسانده است. اما هر بازتاب مرکزی یک دوران 180° هم هست. به عبارت دیگر دوران 180° نسبت به نقطه‌ی A هم همین نتیجه را می‌دهد.

مثال: دو خط متقاطع d و d' و پاره‌خط AB غیرموازی با d و d'، در صفحه‌ی آن‌ها مفروض است. برای رسم پاره‌خطی موازی و مساوی AB که دو سر آن بر روی این دو خط باشد، کدام تبدیل هندسی به‌کار می‌رود؟

حل:

دو خط d و d' و پاره‌خط AB مفروض‌اند. هرگاه خط d را تحت $\overrightarrow{AB}$ و خط d' را تحت $\overrightarrow{BA}$ انتقال دهیم یک متوازی‌الاضلاع حاصل می‌گردد. قطری که دو سر آن روی خطوط d و d' قرار دارد، مساوی و موازی پاره‌خط AB است.

تذکر: می‌توانیم خط d را تحت $\overrightarrow{BA}$ و خط d' را تحت $\overrightarrow{AB}$ انتقال دهیم. در این حالت نیز متوازی‌الاضلاعی دیگر حاصل می‌شود که قطری از آن که دو سر آن روی خطوط d و d' قرار دارد، مساوی و موازی پاره‌خط AB است.



روش یافتن تبدیل‌یافته‌ی هر منحنی دلخواه تحت یک تبدیل:

ابتدا نقطه‌ی پارامتری دلخواه $A=(x,y)$ را روی منحنی در نظر گرفته و تبدیل را بر آن اعمال می‌کنیم تا نقطه‌ی $A'=(X,Y)$ به‌دست آید. سپس y,x را برحسب Y,X پیدا کرده و در منحنی اولیه جایگذاری می‌کنیم. معادله‌ی حاصل تبدیل‌یافته‌ی منحنی تحت تبدیل مورد نظر است.

مثال: تبدیل‌یافته‌ی منحنی $x^۲+y^۲=۱$ تحت تبدیل $f(x,y)=(۳x,۲y)$ کدام است؟

حل: ابتدا نقطه‌ی $A=(x,y)$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم.

$$f(x,y)=(X,Y)=(۳x,۲y)\Rightarrow x=\frac{X}{۳},y=\frac{Y}{۲}\Rightarrow\left(\frac{X}{۳}\right)^۲+\left(\frac{Y}{۲}\right)^۲=۱\Rightarrow\frac{X^۲}{۹}+\frac{Y^۲}{۴}=۱$$

این تبدیل، دایره را به بیضی تبدیل می‌کند.

مثال: تصویر خط $y=x-۸$ تحت تقارن نسبت به محور xها کدام است؟

حل:

$$A=(x,y)\Rightarrow R(x,y)=(x,-y)\Rightarrow X=x,Y=-y\Rightarrow y=-Y\Rightarrow -Y=X-۸\Rightarrow Y=-X+۸$$

مثال: تبدیل‌یافته‌ی خط به معادله‌ی $۲y-x=۵$، تحت دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه‌ی دوران ۹۰° در جهت مثلثاتی، خط مفروض را با کدام مختصات قطع می‌کند؟

۱) $(۵,۵)$ ۲) $(-\frac{۵}{۳},\frac{۵}{۳})$ ۳) $(۱,۳)$ ۴) $(-۳,۱)$

حل: گزینه ۴ پاسخ است.

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&-۱\\۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$$

$$۲(-x')-(y')=۵\Rightarrow ۲x'+y'+۵=۰$$

$$\begin{cases}۲x+y=-۵\\ ۲y-x=۵\Rightarrow ۴y-۲x=۱۰\end{cases}\Rightarrow ۵y=۵\Rightarrow y=۱\Rightarrow x=-۳$$

مثال: دوران یافته خط $y-۲x=۳$ تحت زاویه ۹۰° به مرکز دوران $(۰,۰)$ خط $l_۱$ است. معادله خط تصویر $l_۱$ تحت انتقال $T(x,y)=(x+۱,y-۲)$ کدام است؟

۱) $۲y+x+۶=۰$ ۲) $۲y-x+۴=۰$ ۳) $y-۲x+۵=۰$ ۴) $y+۲x+۱=۰$

حل: گزینه ۱ پاسخ است.

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos ۹۰^\circ&-\sin ۹۰^\circ\\ \sin ۹۰^\circ&\cos ۹۰^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$$

$$T(x',y')=(x'+۱,y'-۲)=(x'',y'')\Rightarrow(x'',y'')=(-y+۱,x-۲)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=y''+۲\\ y=۱-x''\end{cases}\Rightarrow(۱-x'')-۲(y''+۲)=۳\Rightarrow x''+۲y''+۶=۰$$