فصل‌های سوم و چهارم

احتمال:

تعاریف:

آزمایش یا پدیده‌ای را که قبل از رخداد، نتیجه‌اش معلوم نباشد ولی نتیجه‌های ممکن آن مشخص باشد، **آزمایش تصادفی** یا **پدیده‌ی تصادفی** می‌نامند.

فضای نمونه‌ای: مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن را فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی می‌نامیم و آن را با S نمایش می‌دهیم.

برآمد: هر نتیجه‌ی ممکن یعنی هر عضو S را یک برآمد می‌گوییم. در هر آزمایش تصادفی تنها یکی از عضوهای این مجموعه رخ خواهد داد.

پیشامد: هر پیشامد زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است. در هرحال وقتی می‌گوییم پیشامدی رخ خواهد داد به معنای آن است که تنها یکی از برآمدهای آن رخ خواهد داد. دو پیشامد که برآمد مشترکی ندارند را ناسازگار می‌گویند.

منظور از رخداد یک پیشامد، وقوع آن پیشامد، یعنی مشاهده‌ی عضوی از آن پیشامد به عنوان نتیجه‌ی آزمایش است.

پیشامد ناممکن و مطمئن: ϕ را پیشامد ناممکن (نشدنی) و S را پیشامد مطمئن (حتمی) می‌گویند.

انواع فضای نمونه:

تعداد اعضای مجموعه‌ی S یعنی تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای ممکن است متناهی، شمارای نامتناهی یا ناشمارا باشد. وقتی تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای، متناهی یا شمارای نامتناهی باشد، آن را فضای نمونه‌ای «گسسته» می‌نامند. تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای ممکن است ناشمارا باشد، که در این‌صورت فضای نمونه‌ای گسسته‌ای نیست. (مانند انتخاب عددی در بازه‌ی (۲ و ۰).) (وقتی فضای نمونه‌ای، ناشمارا باشد، آن را فضای نمونه‌ای «پیوسته» می‌نامند.)

فضای نمونه
- شمارا (گسسته)
  - متناهی
  - نامتناهی
- ناشمارا (پیوسته)

☜ **مثال: در کیسه‌ای ۷ توپ متمایز وجود دارد. یک توپ به تصادف از آن خارج کرده و بدون مشاهده آن را کنار می‌گذاریم. سپس توپ دیگری را خارج کرده آن را مشاهده می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟**

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) $\binom{7}{2}$ ۴) ۱۲

حل:

چون اطلاعی از خروج مهره اول در دست نیست، پس توقع ما در مورد خروج مهره دوم تغییر نکرده است. یعنی ما هم‌چنان توقع خروج هر ۷ مهره را داریم و نمی‌توانیم بگوییم مهره‌ی معینی شانس خروج ندارد. پس فضای نمونه‌ای، ۷ عضوی است.

اصول موضوع کولموگروف:

وقتی فضای نمونه‌ای S را برای آزمایشی تصادفی داریم، احتمال پیشامدهای فضای S را به‌صورت مقادیر حقیقی یک تابع مجموعه‌ای P تعریف می‌کنیم که این تابع براساس ۳ اصل موضوع زیر، اعداد حقیقی را به پیشامدها، یعنی به زیرمجموعه‌های S نسبت می‌دهد.

اصل موضوع ۱: احتمال هر پیشامد عددی نامنفی است، یعنی: $\forall A \subseteq S : P(A) \geq 0$

اصل موضوع ۲: $P(S) = 1$

اصل موضوع ۳: اگر A_1، A_2، ... و A_n پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار باشند، آن‌گاه:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

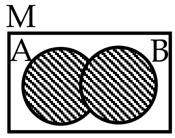
تابعی که در این اصول صادق باشد، به **تابع احتمال** موسوم است. فضای S، تابع P و مجموعه‌ی پیشامدها را **مدل احتمال آزمایش تصادفی** می‌نامند.

عملیات بر روی پیشامدها:

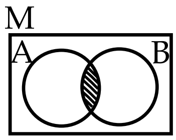
می‌توان بین پیشامدهای یک آزمایش و عبارات مجموعه‌ای یک تناظر یک‌به‌یک ایجاد کرد. در واقع چون پیشامد خود از جنس مجموعه است، می‌توان پیشامدهای جدیدی با استفاده از تلفیق پیشامدهای قبلی ایجاد کرد:

پیشامد وقوع A یا B: $(A\cup B)$

$A\cup B$

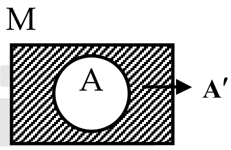


پیشامد وقوع A و B: $(A\cap B)$

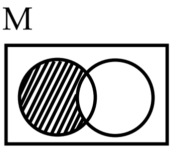


$A\cap B$

پیشامد عدم وقوع A: ($\overline{A}$ یا A')

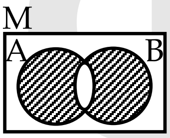


پیشامد وقوع فقط A: (A رخ دهد و B رخ ندهد):



A-B

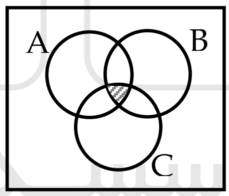
پیشامد وقوع فقط A یا فقط B: (A رخ دهد و B رخ ندهد یا A رخ ندهد و B رخ دهد):



$A\Delta B$

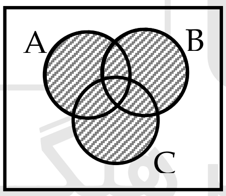
☜**مثال: فرض کنید A , B , C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند. نمودار ون پیشامدهای زیر را رسم کنید:**

الف) هر ۳ پیشامد رخ دهد:



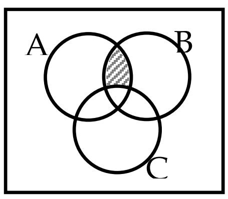
$A\cap B\cap C$

ب) لااقل یکی از پیشامدها رخ دهد:



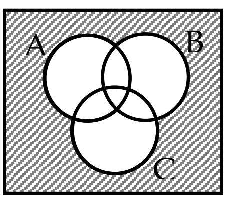
$A\cup B\cup C$

ج) A , B اتفاق بیفتد و C رخ ندهد:



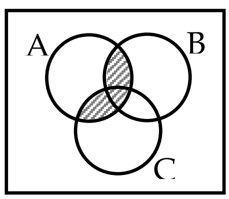
$A\cap B\cap \overline{C}$

د) هیچ‌یک از پیشامدها رخ ندهد:



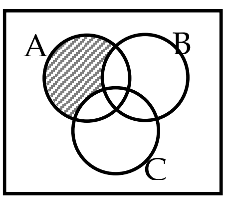
$\overline{A}\cap \overline{B}\cap \overline{C}$

هـ) A اتفاق بیفتد و لااقل یکی از پیشامدهای B , C نیز رخ دهد:



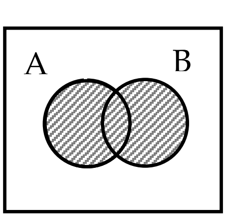
$A\cap (B\cup C)$

و) فقط A اتفاق بیفتد:



$A\cap \overline{B}\cap \overline{C}=A-(B\cup C)$

ز) A اتفاق بیفتد یا در صورتی که A رخ نداد، B رخ دهد:



این عبارت در واقع $A\cup(B-A)$ است که همان $A\cup B$ می‌باشد.

☜ **مثال: سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید آن‌گاه تاس را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید، سکه را دوبار دیگر پرتاب می‌کنیم. مطلوب است تعیین:**

الف) فضای نمونه‌ای این پیشامد.

ب) پیشامد A که در آن دقیقاً یک‌بار سکه رو بیاید.

ج) پیشامد B به‌طوری که حداقل دوبار ظاهر شدن پشت در پرتاب سکه را نشان دهد.

د) $A\cap B'$

✍ **حل:**

الف) $S=\{$ (ر،۱)، (ر،۲)، (ر،۳)، (ر،۴)، (ر،۵)، (ر، ۶)، (ر،ر،پ)، (پ،ر،پ)، (ر،پ،پ)، (پ،پ،پ) $\}$

ب) $A=\{$ (ر،۱)، (ر،۲)، (ر،۳)، (ر،۴)، (ر،۵)، (ر، ۶)، (پ،ر،پ)، (ر،پ،پ) $\}$

ج) $B=\{$ (پ،ر،پ)، (ر،پ،پ)، (پ،پ،پ) $\}$

د) $B'=\{$ (ر،۱)، (ر،۲)، (ر،۳)، (ر،۴)، (ر،۵)، (ر، ۶)، (ر، ر، پ) $\}$

$A\cap B'=\{$ (ر،۱)، (ر،۲)، (ر،۳)، (ر،۴)، (ر،۵)، (ر، ۶) $\}$

☜ **مثال: هریک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۱۶ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به‌طور قرعه برمی‌داریم. مطلوب است تعیین:**

الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت یک رقمی باشد.

ت) پیشامد $A\cap B$

✍ **حل:**

الف) $S=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵\}$

ب) $A=\{۳,۹,۱۵\}$

پ) $B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$

ت) $A\cap B=\{۳,۹,۱۵\}\cap\{۱,۳,۵,۷,۹\}=\{۳,۹\}$

☜ **مثال: یک سکه و یک تاس سالم را با هم می‌اندازیم مطلوب است تعیین:**

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد A که تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید.

ج) پیشامد B که تاس عدد زوج و سکه رو بیاید.

د) $A'\cup B'$

✍ **حل:**

الف: $S=\{$ (ر،۱) و (ر،۲) و (ر،۳) و (ر،۴) و (ر،۵) و (ر،۶) و (پ،۱) و (پ،۲) و (پ،۳) و (پ،۴) و (پ،۵) و (پ،۶) $\}$

ب: $A=\{$ (ر،۲) و (ر،۴) و (ر،۶) و (پ،۲) و (پ،۴) و (پ،۶) و (ر،۱) و (ر،۳) و (ر،۵) $\}$

ج: $B=\{$ (ر،۲) و (ر،۴) و (ر،۶) $\}$

د: $A'=\{$ (پ،۱) و (پ،۳) و (پ،۵) $\}$

$B'=\{$ (ر،۱) و (ر،۳) و (ر،۵) و (پ،۱) و (پ،۲) و (پ،۳) و (پ،۴) و (پ،۵) و (پ،۶) $\}$

$A'\cup B'=\{$ (پ،۱) و (پ،۲) و (پ،۳) و (پ،۴) و (پ،۵) و (پ،۶) و (ر،۱) و (ر،۳) و (ر،۵) $\}$

☜ مثال: ارقام ۹،۰،۳،۵ را درنظر بگیرید. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه‌ای S که شامل تمام اعداد دو رقمی ساخته شده با این ارقام و بدون تکرار باشد.

ب) پیشامد A، آن‌که اعداد دورقمی مضرب ۵ باشد.

ج) پیشامد B، آن‌که اعداد دو رقمی بزرگتر از ۵۰ باشد.

د) پیشامد $A \cap B'$

✍ حل:

الف)

$$S = \{۳۰,۳۵,۳۹,۵۰,۵۳,۵۹,۹۰,۹۳,۹۵\}$$

ب) اعدادی که به صفر یا ۵ ختم می‌شوند، مضرب ۵ هستند.

$$A = \{۳۰,۳۵,۵۰,۹۰,۹۵\}$$

ج)

$$B = \{۵۳,۵۹,۹۰,۹۳,۹۵\}$$

د) ابتدا B' را مشخص می‌کنیم.

$$B' = \{۳۰,۳۵,۳۹,۵۰\}$$
$$A \cap B' = \{۳۰,۳۵,۵۰\}$$

☜ مثال: در انتخاب سه نفر از بین ۷ نفر پیشامد آن که از بین دو نفر a و b حداقل یکی موجود باشد چند عضو دارد؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

✍ حل:

$$\binom{۷}{۳} - \binom{۵}{۳} = ۳۵ - ۱۰ = ۲۵$$

حالتی که هیچ‌کدام موجود نباشد.

احتمال هم‌شانس (متساوی‌الاحتمال) در فضای گسسته: (احتمال کلاسیک)

اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای گسسته‌ی S باشد، $P(A)$ برابر با مجموع احتمال برآمدهایی است که در A هستند. اگر S دارای n برآمد باشد و تابع احتمال به هر برآمد عدد $\frac{1}{n}$ را نسبت دهد، فضای نمونه‌ای حاصل را یکنواخت یا متساوی‌الاحتمال می‌نامند. اگر در این فضا پیشامد A متشکل از m برآمد باشد، آن‌گاه $P(A) = \frac{m}{n}$ (در واقع فراوانی نسبی پیشامد A را احتمال آن تعریف می‌کنیم.) لذا احتمال رخ دادن پیشامد A در این فضا برابر است با: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

☜ مثال: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، احتمال آن‌که مجموع ۵ بیاید، کدام است؟

✍ حل:

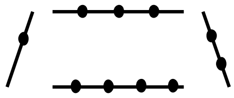
$$A = \{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\}$$
$$|S| = ۶ \times ۶ = ۳۶$$
$$P(A) = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

☜ **مثال: با کدام احتمال رقم سمت راست پلاک اولین اتومبیلی که از بزرگراه خارج می‌شود، از ٤ بیش‌تر نیست یا مضرب ۳ می‌باشد؟ (رقم ۰ در پلاک اتومبیل به‌کار نمی‌رود.)**

✍ **حل:**

$$\text{رقم‌های مطلوب}=\{۱,۲,۳,۶,۹\} \Rightarrow P(A)=\frac{۵}{۹}$$

☜ **مثال: از میان ۱۰ نقطه‌ی زیر، چهار نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که با ٤ نقطه‌ی انتخاب شده بتوان یک چهارضلعی ساخت که روی هر خط فقط یک رأس چهارضلعی قرار داشته باشد، کدام است؟**

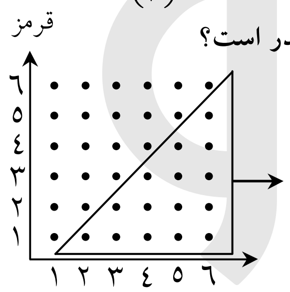


✍ **حل:**

از هر کدام از خط‌ها یکی از رئوس را انتخاب می‌کنیم:

$$P(A)=\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۰}{۴}}$$

☜ **مثال: دو تاس قرمز و سفید پرتاب می‌شوند، احتمال آن که عدد تاس سفید بزرگ‌تر باشد، چقدر است؟**



✍ **حل:**

زوج مرتب‌هایی که مؤلفه سفیدشان بزرگ‌تر است، مطلوبند:

$$P(A)=\frac{\frac{۳۶-۶}{۲}}{۳۶}=\frac{۱۵}{۳۶}$$

☜ **مثال: در اتاقی ۱۰ جفت کفش متمایز وجود دارد، هرگاه از میان آن‌ها دو لنگه کفش انتخاب شود، احتمال این‌که این دو لنگه کفش یک جفت کفش تشکیل دهند، کدام است؟**

✍ **حل:** از بین جفت‌ها مطلوب است یک جفت را انتخاب کنیم:

$$P(A)=\frac{\binom{۱۰}{۱}}{\binom{۲۰}{۲}}$$

☜ **مثال: در پرتاب ٤ سکه با هم، احتمال آنکه فقط ۳ سکه رو یا فقط ۳ سکه پشت بیاید چقدر است؟**

✍ **حل:**

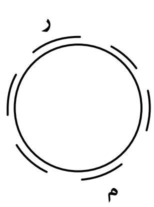
A= {(ر، ر، ر، پ)، (پ، پ، پ، ر)}

جایگشت ر ٤ ×   جایگشت پ ٤ ×

$$P(A)=\frac{۴+۴}{۲^۴}=\frac{۸}{۱۶}=\frac{۱}{۲}$$

☜ **مثال: رئیس، معاون و ٤ کارمند دور یک میز گرد می‌نشینند. با کدام احتمال رئیس مقابل معاون قرار می‌گیرد؟**

✍ **حل:** رئیس در هر مکانی قرار گیرد، از ٥ مکان باقی‌مانده، مکان روبه‌روی رئیس مطلوب است: $P(A)=\frac{۱}{۵}$



☜ مثال: دو تاس سفید و یک تاس قرمز متمایز را می‌ریزیم. احتمال آن‌که عدد تاس قرمز کوچک‌تر از تاس‌های سفید باشد چقدر است؟

✍ حل:

تاس قرمز	تاس‌های سفید	
۱	۵×۵	می‌توانند از ۲ تا ٦ باشند
۲	٤×٤	می‌توانند از ۳ تا ٦ باشند
۳	۳×۳	می‌توانند از ٤ تا ٦ باشند
٤	۲×۲	می‌توانند از ۵ تا ٦ باشند
۵	۱×۱	فقط می‌توانند ٦ باشند

$$P(A)=\frac{۲۵+۱۶+۹+۴+۱}{۶^{۳}}=\frac{۵۵}{۲۱۶}$$

☜ مثال: بر روی هر یک از چند کارت یکسان اعداد ۳ رقمی حاصل از جایگشت ترکیبات مجموعه‌ی ارقام ۲، ٤، ۵، ٦ و۷ را نوشته و به تصادف کارتی بیرون می‌آوریم. احتمال آن‌که دو رقم از ارقام عدد خارج شده فرد باشد چقدر است؟

✍ حل: مطلوب است ۲ رقم از بین ارقام فرد و یک رقم از بین ارقام زوج انتخاب کرده و بچینیم.

$$P(A)=\frac{\binom{۲}{۲}\binom{۳}{۱}\times ۳!}{\binom{۵}{۳}\times ۳!}=\frac{۳}{۱۰}$$

☜ مثال: در کیسه‌ای ۵ مهره‌ی قرمز متمایز، ۳ مهره‌ی سفید متمایز و ۷ مهره‌ی آبی متمایز قرار دارد.

الف) دو مهره از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که یکی سفید و یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۵}{۲}}$$

ب) دو مهره از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که فقط یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$p(A)=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۱۰}{۱}}{\binom{۱۵}{۲}}$$

ج) دو مهره از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که حداقل یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۱۰}{۱}+\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۵}{۲}}$$

د) دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که یکی سفید و یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}\times \overset{\overset{\text{چون ترتیب خروج مهم است}}{\uparrow}}{۲!}}{\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۴}{۱}}$$

هـ) دو مهره متوالیاً و با جایگذاری از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که یکی سفید و یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}\times \overset{\text{چون ترتیب خروج مهم است}}{\overset{\uparrow}{۲!}}}{\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۵}{۱}} \longrightarrow \text{چون مهره خارج شده مجدداً به کیسه بازگشته است}$$

☜ **مثال: ده کارت که بر روی هر کدام از آن‌ها، یکی از اعداد ۱ تا ۱۰ نوشته شده است در درون ظرفی قرار دارند (هیچ دو کارتی شماره‌ی یکسان ندارند). اگر کارت‌های موجود در ظرف را به تصادف و بدون جایگذاری بیرون بیاوریم، احتمال آن‌که ٤ قبل از ٦ و ٦ قبل از ٢ بیرون آید (نه لزوماً بلافاصله) کدام است؟**

حل:

راه ۱: این سه رقم در هر جایگاهی که قرار بگیرند، نسبت به‌هم !۳ حالت جایگشت دارند که حالت ٤٦٢ مطلوب است. لذا همواره یکی از ٦ حالت مطلوب است: $P=\frac{۱}{۶}$

راه ۲: ابتدا مکان این سه رقم را تعیین کرده و سپس طبق ترتیب گفته شده می‌چینیم. بقیه ۷ رقم به‌صورت دلخواه چیده می‌شوند.

$$P(A)=\frac{\binom{۱۰}{۳}\times ۷!}{۱۰!}=\frac{\frac{۱۰\times ۹\times ۸}{۳!}}{۱۰\times ۹\times ۸}=\frac{۱}{۶}$$

☜ **مثال: n نفر را در نظر می‌گیریم. احتمال آن‌که روز تولد هیچ دو نفری از آن‌ها در یک روز یکسان از سال ۳۶۵ روزی نباشد، چقدر است؟**

حل:

نفر اول ۳٦٥ روز برای انتخاب دارد، نفر دوم ۳٦٤ روز و ...

$$P(A)=\frac{۳۶۵\times ۳۶۴\times ...(۳۶۵-n+۱)}{۳۶۵^{n}}$$

☜ **مثال: از بین ۵ داوطلب گروه ریاضی و ۳ داوطلب گروه تجربی، به تصادف ۳ نفر برای انجام آزمونی معرفی می‌شوند. با کدام احتمال دو نفر از معرفی شدگان، از گروه ریاضی است؟**

حل:

باید دو نفر ریاضی باشند و حتماً نفر سوم تجربی و در غیر این صورت ممکن است سه نفر ریاضی شوند.

$$P=\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۳}}=\frac{۱۰\times ۳}{\frac{۸\times ۷\times ۶}{۳\times ۲}}=\frac{۱۵}{۲۸}$$

☜ **مثال: در ظرفی پنج مهره با شماره‌های ۱،۲،۳،۴،۵ قرار دارند. دو مهره باهم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های این دو مهره عددی فرد است؟**

حل:

برای آن‌که مجموع شماره‌ها فرد باشد. باید یکی زوج و دیگری فرد باشد.

$$P=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$$

احتمال دو جمله‌ای:

آزمایش‌های دو حالته را امتحان می‌نامیم و فضای نمونه‌ی هر امتحان دو برآمد دارد.

اگر آزمایشی دو حالته که احتمال پیروزی و شکست در آن برابر است N بار تکرار شود، احتمال آن‌که x بار پیروز شویم برابر است با: $\mathbf{P}=\frac{\binom{N}{x}}{۲^N}$. (مانند پرتاب متوالی سکه یا بچه‌های متوالی یک خانواده)

☜ **مثال: خانواده‌ای دارای ۵ فرزند است. احتمال این‌که این خانواده حداکثر ٤ دختر داشته باشد، کدام است؟**

✍ **حل:**

$$P(\text{حداکثر ٤ دختر})=\mathbf{۱}-\mathbf{P}(\text{۵ دختر})=۱-\frac{۱}{۲^۵}=\frac{۳۱}{۳۲}$$

☜ **مثال: یک سکه را حداقل چند بار باید پرتاب کنیم تا احتمال آمدن اقلا یک شیر بیش از ۹۹ ٪ باشد؟**

✍ **حل:**

$$P(\text{اقلاً یک شیر})=۱-P(\text{اصلاً شیر نیاید})=۱-\frac{۱}{۲^n}>\frac{۹۹}{۱۰۰}=۱-\frac{۱}{۱۰۰}\to(\frac{۱}{۲})^n<\frac{۱}{۱۰۰}\to n\geq ۷ \text{ حداقل ۷ بار}$$

☜ **مثال: سکه‌ای را آن قدر می‌اندازیم تا برای سومین بار رو بیاید. احتمال آن‌که در دهمین پرتاب به این منظور برسیم کدام است؟**

✍ **حل:**

$$P(\text{در دهمین پرتاب})\frac{\binom{۹}{۲}}{۲^{۱۰}}=\frac{۹}{۲۵۶}$$

☜ **مثال: در یک بیمارستان ۵ نوزاد در یک روز متولد شده‌اند. با کدام احتمال لااقل دو نفر از آنان دختر است؟**

✍ **حل:**

$$\Rightarrow \mathbf{P}(\text{حداقل ۲ دختر از ۵ نوزاد})=\mathbf{۱}-(\mathbf{P}(\text{هیچ دختر})+\mathbf{P}(\text{یک دختر}))=۱-\left(\frac{\binom{۵}{۰}}{۲^۵}+\frac{\binom{۵}{۱}}{۲^۵}\right)=۱-(\frac{۱}{۳۲}+\frac{۵}{۳۲})=۱-\frac{۶}{۳۲}=\frac{۱۳}{۱۶}$$

احتمال غیرهم‌شانس (غیرمتساوی‌الاحتمال) در فضای گسسته:

در حالت کلی (حالتی که پیشامدها دارای شانس اتفاق افتادن برابر نباشند) فرض کنید فضای نمونه‌ای ما $S=\{e_۱,e_۲,\ldots,e_n\}$ شامل n عضو باشد. به هر پیشامد ساده‌ی $\{e_k\}$ یک عدد حقیقی $p(\{e_k\})$ که احتمال پیشامد $\{e_k\}$ است، نسبت می‌دهیم. این عدد باید تحت شرایط زیر انتخاب گردد:

الف) $۰\leq p(\{e_k\})\leq ۱$

ب) $\sum_{i=۱}^{n}P(\{e_i\})=۱$

اعداد $p(\{e_۱\}),p(\{e_۲\}),\ldots,p(\{e_n\})$ را که در شرایط بالا صدق می‌کنند، **تخصیص احتمال مقبول** می‌گویند و اگر دو شرط بالا صادق نباشد، **تخصیص احتمال مجاز نیست.**

☜ مثال: سه شناگر A، B و C با هم مسابقه می‌دهند. A و B دارای احتمال بردن مساوی هستند و شانس بردن هر کدام از آن‌ها دو برابر C است. احتمال آن‌که B یا C ببرد کدام است؟

✍ حل:

$$P(A)=P(B)=۲P(C)\to P(A)+P(B)+P(C)=۱\to ۲P(C)+۲P(C)+P(C)=۱\to ۵P(C)=۱\to P(C)=\frac{۱}{۵}$$

$$\to P(B)=\frac{۲}{۵}\to P(B\cup C)=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

☜ مثال: احتمال رو شدن هر وجه از یک تاس غیرهمگن، متناسب با تعداد خال‌هایی است که روی آن حک شده است. احتمال آن‌که در یک بار پرتاب آن، عدد اول ظاهر شود، چقدر است؟

✍ حل:

$$\frac{P(۱)}{۱}=\frac{P(۲)}{۲}=\frac{P(۳)}{۳}=\frac{P(۴)}{۴}=\frac{P(۵)}{۵}=\frac{P(۶)}{۶}=k\to P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱\to$$

$$k+۲k+۳k+۴k+۵k+۶k=۱\to k=\frac{۱}{۲۱}\to P(۲\cup ۳\cup ۵)=\frac{۲}{۲۱}+\frac{۳}{۲۱}+\frac{۵}{۲۱}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

☜ مثال: یک تاس به‌گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در یک پرتاب، احتمال وقوع عدد بزرگ‌تر از ۳ کدام است؟

✍ حل:

$$P(\text{ز})=۳P(\text{ف})$$

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+p(۵)+P(۶)=۱$$

$$\Rightarrow k+۳k+k+۳k+k+۳k=۱\Rightarrow k=\frac{۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow P(x>۳)=۳k+k+۳k=۷k=\frac{۷}{۱۲}$$

احتمال در فضای پیوسته: (ناشمارا)

وقتی فضای نمونه‌ای ناشمارا باشد، تخصیص احتمال به همه‌ی برآمدها عملی نیست. در بیشتر این حالت‌ها، احتمالی که به هریک از برآمدها نسبت می‌دهند باید برابر صفر باشد و تعیین احتمال پیشامدهایی که احتمال آن‌ها صفر نیست از روی برآمدها مشکل خواهد شد.

واضح است که در این حالت دیگر شمارش تعداد عناصر فضای نمونه‌ای یا پیشامد میسر نیست، ولی آن‌چه می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد، «اندازه‌ی» طول بازه‌ها، مساحت سطوح و حجم شکل‌های فضایی است. در این حالت نسبت اندازه‌ی فضای پیشامد به اندازه‌ی فضای نمونه‌ای، احتمال وقوع پیشامد را مشخص می‌کند.

$$P(A)=\frac{\text{طول }A}{\text{طول }S}\quad A,S\subseteq \mathbb{R}$$

$$P(A)=\frac{\text{مساحت }A}{\text{مساحت }S}\quad A,S\subseteq \mathbb{R}^۲$$

$$P(A)=\frac{\text{حجم }A}{\text{حجم }S}\quad A,S\subseteq \mathbb{R}^۳$$

☜ مثال: اگر زاویه‌ی α را به تصادف در فاصله‌ی $[۰,\pi]$ انتخاب کنیم. احتمال آن‌که $\operatorname{Sin}\alpha<\operatorname{Cos}\alpha$ باشد، چقدر است؟

✍ حل:

چون در بازه‌ی $[۰,\frac{\pi}{۴}]$: $\operatorname{Sin}\alpha<\operatorname{Cos}\alpha$ است پس: $P(A)=\frac{L_A}{L_S}=\frac{\frac{\pi}{۴}}{\pi}=\frac{۱}{۴}$

☜ مثال: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ زاویه‌ی $\hat{A}=45^\circ$ و زاویه‌های **B** و **C** به تصادف انتخاب می‌شوند. احتمال این‌که مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ منفرجه‌الزاویه باشد، چقدر است؟

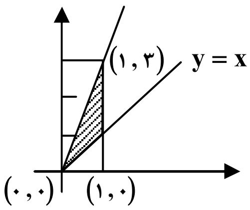
✍ حل: $A=45^\circ \to B+C=135^\circ$

اگر B را متغیر فرض کنیم ۲ حالت امکان‌پذیر است:

$$\left.\begin{array}{l}135 \ge B > 90^\circ \\ 45 \ge B > 0 \to C > 90^\circ\end{array}\right\} \to P(A)=\frac{45+45}{135}=\frac{2}{3}$$

☜ مثال: نقطه‌ی (x,y) را به تصادف از درون مثلثی به رئوس $(0,0),(1,0),(1,3)$ انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که $y>x$ باشد؟

✍ حل:

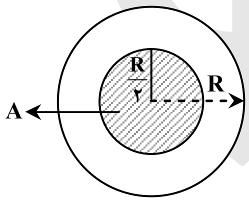


$$P(A)=\frac{\frac{3\times 1}{2}-\frac{1\times 1}{2}}{\frac{3\times 1}{2}}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

☜ مثال: دایره‌ای را در نظر می‌گیریم، نقطه‌ای به‌طور تصادفی بر روی سطح آن انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که این نقطه به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد تا محیط آن، کدام است؟

✍ حل:

چون نقطه بر روی سطح انتخاب شده است، لذا با خطی فرض کردن تغییرات سطح در واقع مطلوب است نقطه به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد تا به محیط آن، یعنی مطلوب است نقطه داخل دایره‌ای به شعاع $\frac{R}{2}$ قرار داشته باشد.



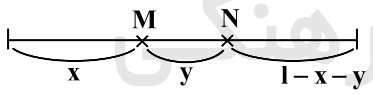
$$P=\frac{\pi(\frac{R}{2})^2}{\pi R^2}=\frac{1}{4}$$

☜ مثال: بر روی پاره‌خط **AB** دو نقطه‌ی **N,M** به تصادف در نظر گرفته می‌شوند. احتمال آن‌که با سه پاره‌خط حاصل بتوان یک مثلث ساخت کدام است؟

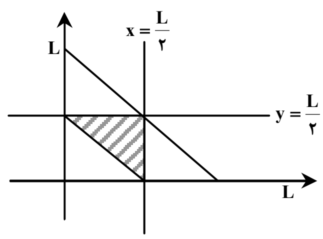
✍ حل:

فضای نمونه $x>0$ و y هایی است که: $x+y<L$

فضای مطلوب: (باید قطعات ایجاد شده روی پاره‌خط تشکیل مثلث دهند.)

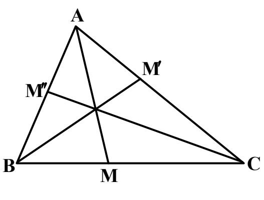


$$\left.\begin{array}{l}L-(x+y)<x+y \to \frac{L}{2}<x+y \\ x<y+(L-x-y) \to x<\frac{L}{2} \\ y<x+(L-x-y) \to y<\frac{L}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow P(A)=\frac{1}{4}$$



☜ مثال: نقطه‌ی (x,y) درون مثلثی با ۳ رأس $(0,0),(4,0),(3,3)$ به تصادف انتخاب می‌شود، با کدام احتمال این نقطه روی یکی از میانه‌های مثلث قرار می‌گیرد؟

✍ حل:

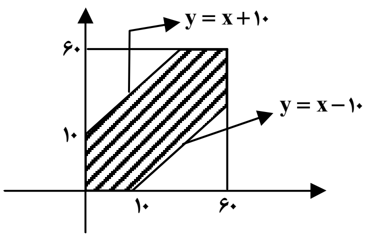


احتمال وقوع پیشامدی با بعدی کم‌تر از فضای نمونه‌ای برابر صفر است.

این پیشامدها را تقریباً غیرممکن می‌نامند.

مثال: دو نفر قرار گذاشتند بین ساعت ۷ و ۸ صبح در آزمایشگاهی حاضر شوند. هر کدام زودتر رسید، ۱۰ دقیقه منتظر دیگری می‌ماند و بعد کار خود را شروع می‌کند. با کدام احتمال این دو نفر قبل از شروع یکدیگر را ملاقات کنند؟

حل:



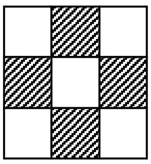
اگر زمان رسیدن نفر اول را x و نفر دوم را y فرض کنیم (نسبت به ساعت ۷)، می‌خواهیم فاصله‌ی دو نفر کم‌تر از ۱۰ دقیقه باشد پس $|x-y|<۱۰$ لذا:

$$-۱۰ < x-y < ۱۰ \rightarrow x-۱۰ < y < x+۱۰$$

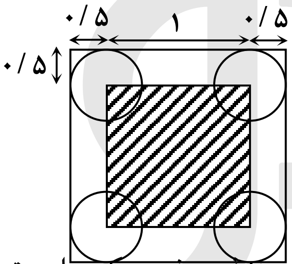
پس فضای مطلوب، قسمت هاشورخورده است:

$$P(A)=\frac{۶۰\times۶۰-۲\times\frac{۵۰\times۵۰}{۲}}{۶۰\times۶۰}=۱-(\frac{۵۰}{۶۰})^۲=\frac{۱۱}{۳۶}$$

مثال: یک سکه به شعاع ۰/۵ سانتی‌متر بر روی مربع شطرنجی مقابل که هر ضلع آن ۶cm است، پرتاب نموده‌ایم. احتمال آن‌که سکه کاملاً درون مربع‌های سفید قرار بگیرد، کدام است؟



حل:

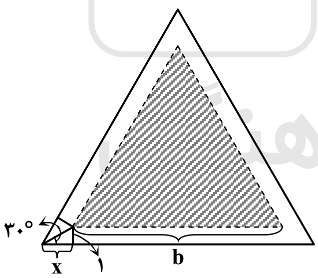


ملاک قرار گرفتن سکه روی صفحه، مرکز سکه می‌باشد، اما در مورد فضای مطلوب باید کل سکه داخل ناحیه سفید باشد. لذا مکان مرکز سکه به‌صورت هاشورخورده مقابل مطلوب است.

$$P(A)=\frac{۵\times۱\times۱}{۶\times۶}=\frac{۵}{۳۶}$$

مثال: صفحه‌ی هدف، مثلث متساوی‌الاضلاع به ارتفاع ۱۵ است. تیر رها شده، به این صفحه‌ی هدف برخورد کرده است. با کدام احتمال محل اصابت تیر از نزدیک‌ترین ضلع این مثلث بیش‌تر از یک واحد است؟

حل:



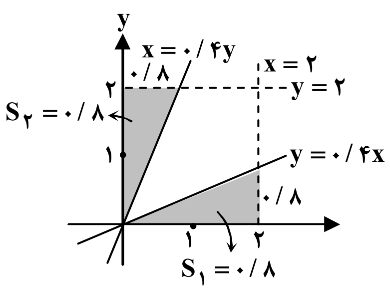
$$\frac{a\sqrt{۳}}{۲}=۱۵ \Rightarrow a=\frac{۳۰}{\sqrt{۳}}=۱۰\sqrt{۳}$$

$$\tan ۳۰^\circ=\frac{۱}{x} \Rightarrow x=\frac{۱}{\tan ۳۰}=\cot ۳۰=\sqrt{۳} \Rightarrow b=۱۰\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}=۸\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{S_A}{S_S}=\frac{(۸\sqrt{۳})^۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}}{(۱۰\sqrt{۳})^۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}}=\frac{۳\times۶۴}{۳\times۱۰۰}=۰/۶۴$$

مثال: دو عدد به تصادف بین صفر و ۲ انتخاب می‌شود. با کدام احتمال نسبت این دو عدد کم‌تر از ۰/٤ است؟

حل:



$$\frac{x}{y}<۰/۴ \xrightarrow{y>۰} x<۰/۴y$$

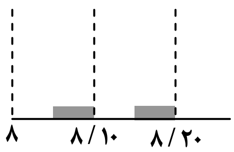
$$\frac{y}{x}<۰/۴ \xrightarrow{y>۰} y<۰/۴x$$

$$\begin{cases}y=۰/۴x\\ x=۲\end{cases} \Rightarrow y=۰/۸ \Rightarrow P(A)=\frac{۰/۸+۰/۸}{۲^۲}=\frac{۱/۶}{۴}=۰/۴$$

مثال: در یک تابلوی نمایش‌گر، تصویری از ساعت ۷ هر ۱۰ دقیقه یک بار، متناوباً لحظه‌ای نمایان می‌شود. اگر فردی بین ساعت ۸ تا ۸:۲۰ مقابل این تابلو قرار گیرد، با کدام احتمال برای رؤیت این تصویر کم‌تر از ٤ دقیقه معطل می‌شود؟

حل:

این فرد یا باید در بازه‌ی ۸/۰۶ تا ۸/۱۰ یا در بازه‌ی ۸/۱٦ تا ۸/۲۰ وارد شود.

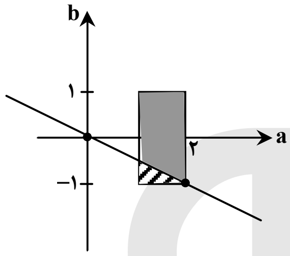


$$P=\frac{4+4}{20}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

مثال: در معادله‌ی $ax+b=0$، ضریب a به‌طور تصادفی از بازه‌ی $[1,2]$ و ضریب b به تصادف از بازه‌ی $[-1,1]$ انتخاب می‌شوند. احتمال این‌که جواب معادله کم‌تر از $\frac{1}{2}$ باشد، کدام است؟

حل:

$$x=-\frac{b}{a}<\frac{1}{2}\Rightarrow -b<\frac{a}{2}$$



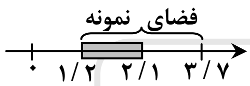
b را y و a را x در نظر می‌گیریم: $y>-\frac{x}{2}$ را رسم می کنیم قسمت بالای خط، مطلوبست. حال کافی است سطح مطلوب را بر سطح کل تقسیم کنیم.

$$P=\frac{2-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1}{2}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

مثال: زمان تصادفی که یک حیوان نسبت به داروی خاصی عکس‌العمل نشان دهد، بین ۱/۲ و ۳/۷ دقیقه است. با کدام احتمال، عکس‌العمل این حیوان نسبت به این دارو، کم‌تر از ۲/۱ دقیقه است؟

حل:

اگر بازه‌ی زمانی برای نشان دادن عکس‌العمل را روی محور اعداد حقیقی رسم کنیم، به‌صورت مقابل است:



یعنی طول پیشامد فضای نمونه‌ای ۲/۵ دقیقه است، حال آن‌که پیشامد مطلوب این است که زمان عکس‌العمل کم‌تر از ۲/۱ دقیقه باشد، یعنی طول فضای مطلوب ۰/۹ دقیقه است. بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A)=\frac{0/9}{2/5}=0/36$$

قوانین احتمال:

۱) برای تمام پیشامدها: $0\le P(A)\le 1$ و (پیشامد حتمی (مطمئن)) $P(S)=1$ و (پیشامد ناممکن (نشدنی)) $P(\phi)=0$

۲) قانون جمع احتمال‌ها: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند: $P(A\cap B)=0$ و لذا: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

۳) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

٤) $P(A')=1-P(A)$

۵) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

٦) $P(A\Delta B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=2P(A\cup B)-P(A)-P(B)$

۷) $P(A'\cap B')=P\left((A\cup B)'\right)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$

☜ مثال: اگر A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای باشند، در کدام حالت $P(B-A)=P(B)-P(A)$ درست است؟

✍ حل:

$$P(A-B)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)$$

$$\Rightarrow\ P(A\cap B)=P(A)\ \Rightarrow\ A\subseteq B$$

☜ مثال: احتمال این‌که شخصی در امتحان ریاضی قبول شود برابر $\frac{۲}{۳}$، احتمال این‌که در امتحان فیزیک قبول شود برابر $\frac{۱}{۴}$ و احتمال این‌که در هر دو درس قبول شود برابر $\frac{۱}{۶}$ است. احتمال این‌که در هیچ‌یک از دو امتحان قبول نشود، چقدر است؟

✍ حل:

$$P(ر'\cap ف')=۱-P(ر)-P(ف)+P(ر\cap ف)=۱-\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

☜ مثال: احتمال این‌که از بین ۳ فرزند یک خانواده حداقل تولد دو نفرشان از لحاظ روزهای هفته مثل هم باشد، چقدر است؟

✍ حل:

$$P(A)=۱-P(\text{هیچ ۲ تایی مثل هم نباشند})=۱-\frac{۷\times۶\times۵}{۷\times۷\times۷}=\frac{۱۹}{۴۹}$$

☜ مثال: از مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\{۱,۲,۳,...,۳۰۰\}$ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد بر ۷ بخش‌پذیر است و بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست؟

✍ حل:

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر هفت $۴۲=\left[\frac{۳۰۰}{۷}\right]$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر هفت و یازده $۳=\left[\frac{۳۰۰}{۷۷}\right]=\left[\frac{۳۰۰}{[۷,۱۱]}\right]$

$\Rightarrow$ تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۷ و بخش‌ناپذیر بر ۱۱ $=۴۲-۳=۳۹$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۳۹}{۳۰۰}=۰/۱۳$$

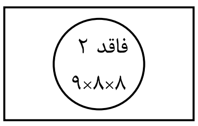
☜ مثال: از بین اعداد طبیعی سه رقمی، به تصادف یک عدد برداشته‌ایم. با کدام احتمال، لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است؟

✍ حل:

تعداد اعداد ۳ رقمی $=n(S)=\boxed{۹}\boxed{۱۰}\boxed{۱۰}=۹\times۱۰\times۱۰=۹۰۰$

تعداد اعداد ۳ رقمی فاقد ۲ $=n(A')=\boxed{۸}\boxed{۹}\boxed{۹}=۸\times۹\times۹$

به جز ۲ ، به جز ۲ ، به جز ۰ و ۲



$n(s)=۹\times۱۰\times۱۰$

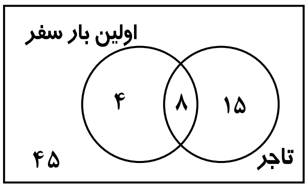
$$\Rightarrow P(A)=\frac{۹\times۱۰\times۱۰-۸\times۹\times۹}{۹\times۱۰\times۱۰}=۱-\frac{۸\times۹\times\cancel{۹}}{\cancel{۹}\times۱۰\times۱۰}=۱-۰/۷۲=۰/۲۸$$

☜ مثال: تعداد مسافرین در یک هتل ۷۲ نفر است که ۲۳ نفر آنان تاجرند و ۱۲ نفر برای اولین‌بار سفر کرده‌اند. ۸ نفر از این تاجرین، برای اولین‌بار سفر کرده‌اند. اگر فردی به تصادف از بین آنان انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد نه تاجر است و نه اولین بار سفر کرده است؟

✍ حل:

۲۳ تاجر:
- ۸ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند.
- ۱۵ نفر برای اولین بار سفر نکرده‌اند

۴۹ نفر تاجر نیستند:
- ٤ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند
- ٤٥ نفر برای اولین بار سفر نکرده‌اند



$$P=\frac{۴۵}{۷۲}=\frac{۵}{۸}$$

مثال: در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی سیاه، ٤ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی آبی وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که هر سه مهره دارای یک رنگ نباشند؟ (مثلاً هر سه قرمز نباشند)

✍ حل:

$$۱-\left(\frac{\binom{۳}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}+\frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}+\frac{\binom{۳}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}\right)=\frac{۱۹}{۲۰}$$